සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது /All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2024
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2024
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2024

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 S I

B කොටස

* ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (*a*) $f(x) = x^2 + 2x + c$ යැයි ගනිමු; මෙහි $c \in \mathbb{R}$ වේ.

$f(x) = 0$ යන සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් ඇති බව දී ඇත. $c < 1$ බව පෙන්වන්න.

α හා β යනු $f(x) = 0$ හි මූල යැයි ගනිමු.

$\alpha^2 + \beta^2 = 4 - 2c$ බව පෙන්වන්න.

$c \neq 0$ හා $\lambda \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ හා $\beta + \frac{1}{\beta}$ මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය $2x^2 + 12x + \lambda = 0$ වේ. c හා λ හි අගයන් සොයන්න.

(*b*) $f(x) = x^3 + px^2 + qx + p$ යැයි ගනිමු; මෙහි $p, q \in \mathbb{R}$ වේ. $f(x)$ යන්න $(x - 2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය, $f(x)$ යන්න $(x - 1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂයට වඩා 36 ක් වැඩි ය. $3p + q = 29$ බව පෙන්වන්න.

$(x + 1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බව ද දී ඇත.

$p = 6$ හා $q = 11$ බව පෙන්වා $f(x)$ සම්පූර්ණයෙන් සාධකවලට වෙන් කරන්න.

ඒ නයින්, $f(x) = 3(x + 2)$ විසඳන්න.

12. (*a*) පවුලක දෙමාපියන් තම ළඟම ඥාතීන් 15 දෙනෙකු අතුරෙන් 6 දෙනෙකුට රාත්‍රී භෝජන සංග්‍රහයකට ආරාධනා කිරීමට තීරණය කරති. පියාට ළඟම ගැහැනු ඥාතීන් 5 දෙනෙකු හා ළඟම පිරිමි ඥාතීන් 3 දෙනෙකු සිටින අතර, මවට ළඟම ගැහැනු ඥාතීන් 3 දෙනෙකු හා ළඟම පිරිමි ඥාතීන් 4 දෙනෙකු සිටී.

(i) පියාට ඔහුගේ ළඟම ගැහැනු ඥාතීන් 3 දෙනෙකුටත් මවට ඇයගේ ළඟම පිරිමි ඥාතීන් 3 දෙනෙකුටත් ආරාධනා කළ හැකි

(ii) පිරිමි ආරාධිතයන් 3 දෙනෙකු හා ගැහැනු ආරාධිතයන් 3 දෙනෙකු වන පරිදි, පියාට ඔහුගේ ළඟම ඥාතීන් 3 දෙනෙකුටත් මවට ඇයගේ ළඟම ඥාතීන් 3 දෙනෙකුටත් ආරාධනා කළ හැකි

වෙනස් විධි ගණන සොයන්න.

[අටවැනි පිටුව බලන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{1}{r(r+2)(r+4)}$ හා $f(r) = \dfrac{1}{r(r+2)}$ යැයි ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $f(r) - f(r+2) = AU_r$ වන පරිදි A තාත්ත්වික නියතයෙහි අගය නිර්ණය කරන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{11}{96} - \dfrac{1}{4(n+1)(n+3)} - \dfrac{1}{4(n+2)(n+4)}$ බව පෙන්වන්න.

තවද, $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} (mU_r + U_{n+1-r}) = \dfrac{11}{32}$ වන පරිදි m තාත්ත්වික නියතයෙහි අගය සොයන්න.

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & a & 2 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 3 & b & a \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ. $2\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ යැයි දී ඇත.

$a = 0$ හා $b = 5$ බව පෙන්වන්න.

a හා b හි මෙම අගයන් සඳහා, $\mathbf{C} = \mathbf{AB}^\mathrm{T}$ යැයි ගනිමු.

$\mathbf{C}$ සොයා $\mathbf{C}^{-1}$ ලියා දක්වන්න.

$\mathbf{DC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ වන පරිදි වූ $\mathbf{D}$ න්‍යාසය සොයන්න.

(*b*) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු.

(i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(ii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(iii) $z_1 \overline{z_1} = |z_1|^2$

බව පෙන්වන්න.

$z_2 \neq 0$ සඳහා $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ යන ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්, $|z_1| = 1$ හා $z_1 \neq \pm 1$ නම් ද $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ යන්න තාත්ත්වික ද නම්, $|z_2| = 1$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $\sqrt{3} + i$ යන්න $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r > 0$ හා $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

ද මුවාවර් ප්‍රමේය භාවිතයෙන්, $\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^{24}}{2^{23}(1+i)} = 1 - i$ බව පෙන්වන්න.

14. (*a*) $x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$ සඳහා $f(x) = \dfrac{px+q}{(x-1)(x-2)}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $p, q \in \mathbb{R}$ වේ.

$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයට $(0, 1)$ හි දී ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යයක් ඇති බව දී ඇත. $p = -3$ හා $q = 2$ බව පෙන්වන්න.

p හා q හි මෙම අගයන් සඳහා, $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $x \neq 1, 2$ සඳහා $f'(x) = \dfrac{x(3x-4)}{(x-1)^2(x-2)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වා, $f(x)$ අඩුවන ප්‍රාන්තර හා $f(x)$ වැඩිවන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ඒ නයින්, $x^2(x-1)(x-2) = 2 - 3x$ සමීකරණයේ තාත්ත්වික විසඳුම් ගණන සොයන්න.

(*b*) පියනක් සහ පතුලක් සහිත සිලින්ඩරයක්, පරිමාව 1024π cm^3 වන පරිදි සාදා ඇත. සිලින්ඩරයේ අරය r cm යැයි ගනිමු. සිලින්ඩරයේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය S cm^2 යන්න $r > 0$ සඳහා $S = 2\pi\left(\dfrac{1024}{r} + r^2\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

S අවම වන්නේ $r = 8$ වන විට බව පෙන්වන්න.

15. (*a*) සියලු $t \in \mathbb{R}$ සඳහා $3t^2 + 4 = A(t^2 - 2t + 4) + Bt(t+1)$ වන පරිදි A හා B තාත්ත්වික නියතයන්හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $\displaystyle\int \frac{3t^2+4}{(t+1)(t^2-2t+4)}\,dt$ සොයන්න.

(*b*) $u = x + \sqrt{x^2+3}$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \frac{1}{2}\ln 3$ බව පෙන්වන්න.

$J = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+3}\,dx$ යැයි ගනිමු. කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $2J = 2 + \displaystyle\int_0^1 \frac{3}{\sqrt{x^2+3}}\,dx$ බව පෙන්වන්න.

$J = 1 + \dfrac{3}{4}\ln 3$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*c*) a නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\right)dx = \frac{\pi}{8}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

16. $A \equiv (1, 2)$ හා $B \equiv (a, b)$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ. AB රේඛා ඛණ්ඩයේ l ලම්බ සමච්ඡේදකයේ සමීකරණය $x + y - 4 = 0$ බව දී ඇත. a හා b හි අගයන් සොයන්න.

$C \equiv (3, 1)$ යැයි ගනිමු. C ලක්ෂ්‍යය l රේඛාව මත පිහිටන බව පෙන්වා $A\hat{C}B$ සොයන්න.

A, B හා C ලක්ෂ්‍ය හරහා යන වෘත්තය S යැයි ගනිමු. S හි කේන්ද්‍රය $\left(\frac{13}{6}, \frac{11}{6}\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වා S හි සමීකරණය සොයන්න.

ඒ නයින්, A, B ලක්ෂ්‍ය හා $D \equiv (0, 3)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

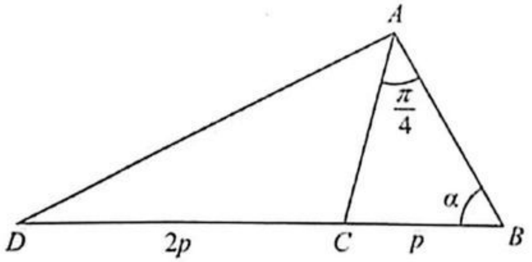
17. (*a*) $6\cos 2x - 8\sin 2x$ යන්න $R\cos(2x + \alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $R > 0$ හා $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ වේ.

ඒ නයින්, $6\cos 2x - 8\sin 2x = 5$ විසඳන්න.

$24\cos^2 x - 32\sin x\cos x$ යන්න $a\cos 2x + b\sin 2x + c$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $a, b, c\ (\in \mathbb{R})$ නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$24\cos^2 x - 32\sin x\cos x$ හි අවම අගය **අපෝහනය** කරන්න.

(*b*)



රූපයෙහි පෙන්වා ඇති ABC ත්‍රිකෝණයෙහි $BC = p$, $B\hat{A}C = \frac{\pi}{4}$ හා $A\hat{B}C = \alpha$ වේ. දික් කළ BC රේඛාව මත D පිහිටා ඇත්තේ $CD = 2p$ වන පරිදි ය.

$AB = p(\cos\alpha + \sin\alpha)$ බව පෙන්වන්න.

p හා α ඇසුරෙන් AD^2 සොයන්න.

$AD = 3p$ නම් $\alpha = \tan^{-1}(5)$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*c*) $\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ සමීකරණය විසඳන්න.

* * *