සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2023 (2024)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2023 (2024)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2023 (2024)

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 S I

B කොටස

※ ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (a) $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) = ax^2 + bx + c$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a > 0$ සහිතව $a, b, c \in \mathbb{R}$ වේ.

$f(x)$ හි අවම අගය $-\dfrac{\Delta}{4a}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\Delta = b^2 - 4ac$ වේ.

p හා q යනු ධන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා යැයි ද $r \in \mathbb{R}$ යැයි ද ගනිමු. තවද, $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $g(x) = px^2 + 2\sqrt{pq}\,x + qr$ යැයි ද ගනිමු.

$g(x) = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික මූල නොමැති බව දී ඇත. $r > 1$ බව පෙන්වන්න.

දැන්, $g(x)$ හි අවම අගය q බව දී ඇත. $r = 2$ බව පෙන්වන්න.

$y = x + 1$ සරල රේඛාව $r = 2$ වන $y = g(x)$ වක්‍රයට $(0, 1)$ ලක්ෂ්‍යයෙහිදී වූ ස්පර්ශ රේඛාව නම්, p හා q හි අගයන් සොයන්න.

(b) $a \in \mathbb{R}$ යැයි ද, $p(x)$ යනු මාත්‍රය 4 වූ බහුපදයක් යැයි ද ගනිමු. $(x - a)$ යන්න $p(x)$ හා $p'(x)$ යන දෙකෙහිම සාධකයක් නම්, $(x - a)^2$ යන්න $p(x)$ හි සාධකයක් වන බව පෙන්වන්න; මෙහි $p'(x)$ යනු $p(x)$ හි x විෂයයෙන් ව්‍යුත්පන්නය වේ.

$x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8$ යැයි ගනිමු. $(x - 2)^2$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බව **අපෝහනය** කරන්න.

$f(-1)$ හි අගය සොයා, $f(x)$ සම්පූර්ණයෙන් සාධකවලට වෙන් කරන්න.

12. (a) පිරිමි 8 දෙනෙකුගෙන් හා ගැහැනු 6 දෙනෙකුගෙන් යුත් කණ්ඩායමකින් පිරිමි 4 දෙනෙකුගෙන් හා ගැහැනු 4 දෙනෙකුගෙන් සමන්විත කමිටුවක් තෝරා ගත යුතුව ඇත.

(i) කමිටුව තෝරා ගත හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

(ii) එබඳු කමිටුවක් තෝරා ගත්තේ යැයි සිතමු. කිසිම ගැහැනුන් දෙදෙනෙකු එකළඟ වාඩි විය නොහැකි නම්, එම කමිටු සාමාජිකයන් පේළියකට වාඩි විය හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

[අටවැනි පිටුව බලන්න.

(*b*) සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{n}{4}(n+1)(n+2)(n+3)$ බව දී ඇත.

සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_n = n(n+1)(n+2)$ බව පෙන්වන්න.

සියලු $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $V_r = \frac{1}{U_r}$ යැයි ගනිමු.

සියලු $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $V_r = \frac{A}{r(r+1)} + \frac{B}{(r+1)(r+2)}$ වන පරිදි A හා B තාත්ත්වික නියත සොයන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} V_r = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} V_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව තවදුරටත් පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

$\sum_{r=m}^{\infty} V_r = \frac{1}{24}$ වන පරිදි $m \in \mathbb{Z}^+$ සොයන්න.

13. (*a*) $a \in \mathbb{R}$ යැයි ද $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ද ගනිමු. $\mathbf{A}^{-1}$ පවතින බව පෙන්වා, $\mathbf{A}^{-1}$ ලියා දක්වන්න.

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු.

(i) $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ වන පරිදි වූ a හි අගය සොයන්න.

(ii) $\mathbf{BC} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ වන පරිදි වූ $\mathbf{C}$ න්‍යාසය සොයන්න.

(*b*) $z \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු. z හි සංකීර්ණ ප්‍රතිබද්ධය $\bar{z}$ හා z හි මාපාංකය $|z|$ අර්ථ දක්වන්න.

$|z| = 1$ නම්, $\bar{z} = \frac{1}{z}$ බව පෙන්වා, ඕනෑම $w \in \mathbb{C}$ සඳහා $|z - w| = |1 - \bar{z}w|$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

දැන්, $z = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$ යැයි ගනිමු. $|z|$ හා $\operatorname{Arg} z$ සොයන්න.

$|w| < 1$ හා $\operatorname{Arg} w = \alpha$ වන පරිදි $w \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ වේ.

එබඳු එක් w සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් තෝරා ගනිමින්, $1, z, w$ හා $\bar{z}w$ නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය ආගන්ඩ් සටහනක ලකුණු කර $|z - w| = |1 - \bar{z}w|$ වන්නේ ඇයි දැයි ජ්‍යාමිතිකව පැහැදිලි කරන්න.

(*c*) $n \in \mathbb{Z}^+$ යැයි ගනිමු. $\dfrac{\left(\cos\frac{2\pi}{15} + i\sin\frac{2\pi}{15}\right)^n}{\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)^7}$ හි තාත්ත්වික කොටස $\frac{1}{2}$ වන පරිදි වූ n හි කුඩාතම අගය සොයන්න.

14. (*a*) $a, p, q \in \mathbb{R}$ හා $p < q$ යැයි ගනිමු.

$x \in \mathbb{R} - \{p, q\}$ සඳහා $f(x) = \dfrac{(ax+1)(x+2)}{(x-p)(x-q)}$ යැයි ගනිමු.

$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ $x = 1$ හා $x = -4$ බව දී ඇත. p හා q හි අගයන් ලියා දක්වන්න.

$y = 1$ යන්න $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛයක් බව දී ඇති විට, $a = 1$ බව පෙන්වන්න.

a, p හා q හි මෙම අගයන් සඳහා $f(x)$ වැඩිවන ප්‍රාන්තර හා $f(x)$ අඩුවන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

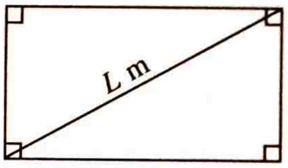
$g(x) = f(x) + 1$ යැයි ගනිමු.

ස්පර්ශෝන්මුඛ හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = g(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

$g(x)$ හි පරාසය ලියා දක්වන්න.

(*b*) වර්ගඵලය k m^2 වූ සෘජුකෝණාස්‍රාකාර පෙදෙසක විකර්ණයක් දිගේ වැටක් සෑදීමට අවශ්‍යව ඇත. සෘජුකෝණාස්‍රයේ දිග x m යැයි ගනිමු (රූපය බලන්න). වැටෙහි දිග L m යන්න $L^2 = x^2 + \dfrac{k^2}{x^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, L අවම වන්නේ $x = \sqrt{k}$ වන විට බව පෙන්වන්න.



15. (*a*) $k \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x-k)}\,\mathrm{d}x$ සොයන්න.

(*b*) $\displaystyle\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} x\sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$ ට කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ

$\displaystyle\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} x\{2\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\}\,\mathrm{d}x = e^{\pi}$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $k > 0$ යැයි ගනිමු. $x > 0$ සඳහා $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\left(k\sqrt{x} - 1\right)e^{k\sqrt{x}}\right\} = \dfrac{k^2}{2}e^{k\sqrt{x}}$ බව පෙන්වන්න.

$I_k = \displaystyle\int_1^4 e^{k\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ යැයි ද ගනිමු. $I_k = \dfrac{2}{k^2}\left\{(2k-1)e^{2k} - (k-1)e^{k}\right\}$ බව පෙන්වන්න.

S යනු $y = e^{\sqrt{x}}, x = 1, x = 4$ හා $y = 0$ වක්‍ර මගින් ආවෘත වන පෙදෙස යැයි ගනිමු.

S හි වර්ගඵලය $2e^2$ බව පෙන්වන්න.

S පෙදෙස x-අක්ෂය වටා රේඩියන 2π වලින් භ්‍රමණය කිරීමෙන් ලැබෙන ඝන වස්තුවේ පරිමාව ද සොයන්න.

[දහවැනි පිටුව බලන්න.

16. $m \in \mathbb{R}$ යැයි ද, l යනු m අනුක්‍රමණය ලෙස ඇතිව $A \equiv (3, 1)$ ලක්ෂ්‍ය හරහා යන රේඛාව යැයි ද සිතමු.

l හි සමීකරණය m ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න.

A හරහා $S_1 \equiv 5x^2 + 5y^2 - 10x + 10y + 6 = 0$ වෘත්තයට ස්පර්ශක දෙකක් පවතින බව පෙන්වා, ඒවා අතර සුළු කෝණය සොයන්න.

B හා D යනු මෙම ස්පර්ශක $S_1 = 0$ වෘත්තය ස්පර්ශ කරන ලක්ෂ්‍ය යැයි ද, C යනු $S_1 = 0$ හි කේන්ද්‍රය යැයි ද ගනිමු.

$ABCD$ යනු වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව පෙන්වා A, B, C හා D ලක්ෂ්‍ය හරහා යන වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

BD ස්පර්ශ ජ්‍යායයෙහි සමීකරණය සොයා, B හා D හරහා යන $S_1 = 0$ වෘත්තය ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරන වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

17. (*a*) $\theta \in \mathbb{R}$ සඳහා $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ බව පෙන්වන්න.

$\cos^2 x - 1 = \sin^2 x + 3\cos x$ සමීකරණය තෘප්ත කරන $[0, 2\pi)$ ප්‍රාන්තරය තුළ වූ සියලුම x හි අගයන් සොයන්න.

(*b*) ABC ත්‍රිකෝණයක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන් $A + B + C = \pi$ යන ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්

$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$ හා $\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\frac{A}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}$ හා $1 - \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = \sin\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

ඒ නයින්, $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $\tan^{-1}(2x) + \tan^{-1}(3x) = \frac{3\pi}{4}$ විසඳන්න.

***