47629

AL/2021(2022)/10/S-I

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි /முழுப் பதிப்புரிமையுடையது /All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2021(2022)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2021(2022)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2021(2022)

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 S I

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය - මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time - 10 minutes

අමතර කියවීම් කාලය ප්‍රශ්න පත්‍රය කියවා ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීමටත් පිළිතුරු ලිවීමේදී ප්‍රමුඛත්වය දෙන ප්‍රශ්න සංවිධානය කර ගැනීමටත් යොදාගන්න.

විභාග අංකය							

උපදෙස්:

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
  A කොටස (ප්‍රශ්න 1 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17).
- **A කොටස:**
  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
- **B කොටස:**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය, **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙන යාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

(10) සංයුක්ත ගණිතය I		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	

එකතුව

ඉලක්කමෙන්	
අකුරින්	

සංකේත අංක

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක		
පරීක්ෂා කළේ:	1	
	2	
අධීක්ෂණය කළේ:		

[දෙවැනි පිටුව බලන්න.

A කොටස

1. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n}(6r+1) = n(3n+4)$ බව සාධනය කරන්න.

2. එක ම රූප සටහනක $y = 2|x+1|$ හා $y = 2-|x|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.
එනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $2|x+2|+|x| \leq 4$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

විභාග අංකය							

3. ආගන්ඩ් සටහනක, $\text{Arg}(z-1-i) = -\frac{\pi}{4}$ සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

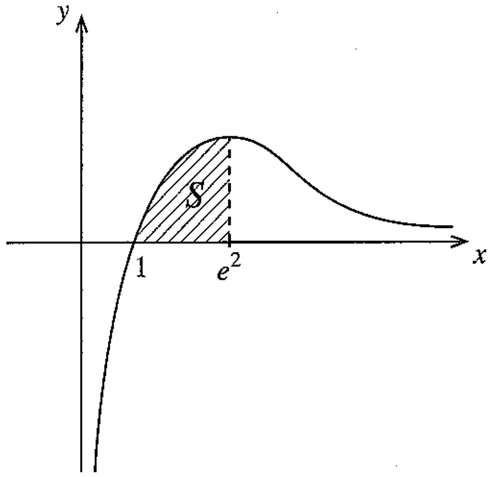
ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $\text{Arg}(iz+1-i) = \frac{\pi}{4}$ සපුරාලන $|z-2+i|$ හි අවම අගය $\frac{1}{\sqrt{2}}$ බව පෙන්වන්න.

4. $k > 0$ යැයි ගනිමු. $\left(x^2+\frac{k}{x}\right)^{11}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^7 හි සංගුණකය හා $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{11}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^{-7} හි සංගුණකය සමාන බව දී ඇත. $k=1$ බව පෙන්වන්න.

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)} = 4$ බව පෙන්වන්න.

6. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $y = 0$ හා $x = e^2$ වක්‍ර මගින් ආවෘත වන පෙදෙස S යැයි ගනිමු. S හි වර්ගඵලය, වර්ග ඒකක 4 ක් බව පෙන්වන්න.

S පෙදෙස x−අක්ෂය වටා රේඩියන 2π වලින් භ්‍රමණය කරනු ලැබේ. මෙලෙස ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව $\dfrac{8\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.



7. $t \neq 0$ සඳහා $x = ct$ හා $y = \frac{c}{t}$ මගින් පරාමිතිකව දෙනු ලබන සෘජුකෝණාස්‍ර බහුවලයට $P \equiv \left(cp, \frac{c}{p}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේදී වූ ස්පර්ශ රේඛාවේ සමීකරණය $x + p^2y = 2cp$ බව පෙන්වන්න.

P හි දී මෙම බහුවලයට වූ අභිලම්බ රේඛාව වෙනත් $Q \equiv \left(cq, \frac{c}{q}\right)$ ලක්ෂ්‍යයකදී බහුවලය නැවත හමු වේ.

$p^3q = -1$ බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

8. $A \equiv (0, -1)$ හා $B \equiv (9, 8)$ යැයි ගනිමු. C ලක්ෂ්‍යය AB මත $AC : CB = 1 : 2$ වන පරිදි පිහිටයි. C හරහා යන AB ට ලම්බ වූ l සරල රේඛාවේ සමීකරණය $x + y - 5 = 0$ බව පෙන්වන්න.

$y = 5x + 1$ සරල රේඛාවට AD සමාන්තර වන පරිදි l මත වූ ලක්ෂ්‍යය D යැයි ගනිමු. D හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

9. $x + 2y = 3$ සරල රේඛාව, $S \equiv x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$ වෘත්තය ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකකදී ඡේදනය කරන බව පෙන්වන්න.
මෙම ලක්ෂ්‍ය දෙක හා $S = 0$ වෘත්තයෙහි කේන්ද්‍රය හරහා යන වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

....

10. $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 1$ යන්න $R\cos(2x - \alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $R > 0$ හා $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ වේ.
ඒ නයින්, $\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x = 1$ සමීකරණය විසඳන්න.

....

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2021(2022)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2021(2022)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2021(2022)

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 S I

B කොටස

* ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (*a*) $k>1$ යැයි ගනිමු. $x^2-2(k+1)x+(k-3)^2=0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල ඇති බව පෙන්වන්න. මෙම මූල α හා β යැයි ගනිමු. k ඇසුරෙන් $\alpha+\beta$ හා $\alpha\beta$ ලියා දක්වා, α හා β දෙකම ධන වන පරිදි වූ k හි අගයන් සොයන්න.

දැන්, $1<k<3$ යැයි ගනිමු. k ඇසුරෙන්, $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$ හා $\dfrac{1}{\sqrt{\beta}}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න.

(*b*) $f(x)=2x^3+ax^2+bx+1$ හා $g(x)=x^3+cx^2+ax+1$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a,b,c\in\mathbb{R}$ වේ. $(x-1)$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය 5 බව හා x^2+x-2 මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $x+1$ බව දී ඇත. a,b හා c හි අගයන් සොයන්න.

තවද, a,b හා c සඳහා මෙම අගයන් සහිත ව, සියලු $x\in\mathbb{R}$ සඳහා $f(x)-2g(x)\leq\dfrac{13}{12}$ බව පෙන්වන්න.

12. (*a*) පහත දී ඇති සංඛ්‍යාංක 10 න් ගනු ලබන සංඛ්‍යාංක 4 කින් සමන්විත, සංඛ්‍යාංක 4 ක සංඛ්‍යාවක් සෑදීමට අවශ්‍යව ඇත:

$$1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5$$

(i) තෝරා ගනු ලබන සංඛ්‍යාංක 4 ම වෙනස් නම්,

(ii) ඕනෑම සංඛ්‍යාංක 4 ක් තෝරාගත හැකි නම්,

සෑදිය හැකි එවැනි වෙනස් සංඛ්‍යාංක 4 ක සංඛ්‍යා ගණන සොයන්න.

(*b*) $r\in\mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r=\dfrac{-16r^3+12r^2+40r+9}{5(2r+1)^2(2r-1)^2}$ යැයි ගනිමු.

$r\in\mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r=\dfrac{A(r-1)}{(2r+1)^2}-\dfrac{(r-B)}{(2r-1)^2}$ වන පරිදි A හා B තාත්ත්වික නියතයන් හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $r\in\mathbb{Z}^+$ සඳහා $\dfrac{1}{5^{r-1}}U_r=f(r)-f(r-1)$ වන පරිදි $f(r)$ සොයා,

$n\in\mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{5^{r-1}}U_r=1+\frac{n-1}{5^n(2n+1)^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{5^{r-1}}U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව **අපෝහනය** කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{C} = \mathbf{AB^T}$ යැයි ද ගනිමු. a ඇසුරෙන් $\mathbf{C}$ සොයා, සියලු $a \neq 0$ සඳහා $\mathbf{C}^{-1}$ පවතින බව පෙන්වන්න.

a ඇසුරෙන් $\mathbf{C}^{-1}$, එය පවතින විට, ලියා දක්වන්න.

$\mathbf{C}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}$ නම්, $a = 2$ බව පෙන්වන්න.

a සඳහා මෙම අගය සහිතව, $\mathbf{DC} - \mathbf{C^TC} = 8\mathbf{I}$ වන පරිදි $\mathbf{D}$ න්‍යාසය සොයන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

(*b*) $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ හා $z_2 = 1 + i$ යැයි ගනිමු. $\frac{z_1}{z_2}$ යන්න $x + iy$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$.

තවද, z_1 හා z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා $r > 0$ හා $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ වන $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කර,

ඒ නයින්, $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ බව පෙන්වන්න.

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*c*) $n \in \mathbb{Z}^+$ ද $k \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\theta \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ යැයි ද ගනිමු.

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්, $(1 + i\tan\theta)^n = \sec^n\theta(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $(1 - i\tan\theta)^n$ සඳහා එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලබා ගෙන

$(1 + i\tan\theta)^n + (1 - i\tan\theta)^n = 2\sec^n\theta\cos n\theta$ බව පෙන්වන්න.

$z = i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$ යන්න $(1+z)^{25} + (1-z)^{25} = 0$ හි විසඳුමක් බව **අපෝහනය** කරන්න.

14. (*a*) $x \neq 0, 2$ සඳහා $f(x) = \frac{4x+1}{x(x-2)}$ යැයි ගනිමු.

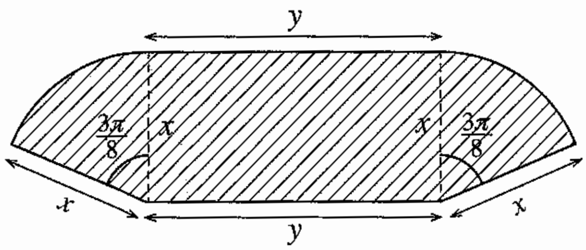
$x \neq 0, 2$ සඳහා $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $f'(x) = -\frac{2(2x-1)(x+1)}{x^2(x-2)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තර හා $f(x)$ අඩු වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, x-අන්තඃඛණ්ඩය හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

මෙම ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්, $f(x) + |f(x)| > 0$ අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි සියලුම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

(*b*) යාබද රූපයෙහි අඳුරු කළ S පෙදෙසින් සෘජුකෝණාස්‍රයකින් හා කේන්ද්‍රයෙහි $\frac{3\pi}{8}$ ක කෝණයක් ආපාතනය කරන වෘත්තයක කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩ දෙකකින් සමන්විත ගෙවත්තක් දැක්වේ. එහි මාන, මීටරවලින්, රූපයෙහි දක්වා ඇත. S හි වර්ගඵලය $36\ \text{m}^2$ බව දී ඇත. S හි පරිමිතිය p m යන්න $x > 0$ සඳහා $p = 2x + \frac{72}{x}$ මගින් දෙනු ලබන බව ද, $x = 6$ විට p අවම වන බව ද පෙන්වන්න.



15. (*a*) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = A(x^2+1)^2 + Bx(x^2+1) + Cx^2$ වන පරිදි A, B හා C නියතයන් හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\dfrac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}$ යන්න භින්න භාගවලින් ලියා දක්වා,

$\displaystyle\int \frac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$ සොයන්න.

(*b*) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \sin^{-1}\left(\sqrt{x}\right)dx$ යැයි ගනිමු. $I = \dfrac{\pi}{24} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$ බව පෙන්වා **ඒ නයින්,** I අගයන්න.

(*c*) $\dfrac{d}{dx}\left(x\ln(x^2+1) + 2\tan^{-1}x - 2x\right) = \ln(x^2+1)$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,dx$ සොයා, $\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}(\ln 4 + \pi - 4)$ බව පෙන්වන්න.

a නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්

$\displaystyle\int_0^1 \ln\left[(x^2+1)(x^2-2x+2)\right]dx$ හි අගය සොයන්න.

16. $P \equiv (x_1, y_1)$ ද l යනු $ax + by + c = 0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛාව ද යැයි ගනිමු. P ලක්ෂ්‍යය හරහා යන හා l ට ලම්බ වූ රේඛාව මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(x_1 + at, y_1 + bt)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $t \in \mathbb{R}$ වේ.

P හි සිට l ට ලම්බ දුර $\dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

l යනු $x + y - 2 = 0$ සරල රේඛාව යැයි ගනිමු. $A \equiv (0, 6)$ හා $B \equiv (3, -3)$ ලක්ෂ්‍ය l හි දෙපස පිහිටන බව පෙන්වන්න.

l හා AB රේඛාව අතර සුළු කෝණය සොයන්න.

l ස්පර්ශ කරන, පිළිවෙළින් A හා B කේන්ද්‍ර සහිත S_1 හා S_2 වෘත්තවල සමීකරණ සොයන්න.

l හා AB රේඛාවේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය C යැයි ගනිමු. C හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

S_1 හා S_2 ට C හරහා වූ අනෙක් පොදු ස්පර්ශකයේ සමීකරණය ද සොයන්න.

මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන, S_1 හි පරිධිය සමච්ඡේද කරන හා S_2 ට ප්‍රලම්බ වෘත්තයේ සමීකරණය $3x^2 + 3y^2 - 38x - 22y = 0$ බව පෙන්වන්න.

17. (*a*) $\cos A, \cos B, \sin A$ හා $\sin B$ ඇසුරෙන් $\cos(A+B)$ හා $\cos(A-B)$ ලියා දක්වන්න.

ඒ නයින්, $\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

$\cos C - \cos D = -2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$\cos 9x + \cos 7x + \cot x\,(\cos 9x - \cos 7x) = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

(*b*) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **කෝසයින නීතිය** ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

$n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු. $\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ බව පෙන්වන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක $AB = 20$ cm, $BC = 10$ cm හා $\sin 2B = \frac{24}{25}$ බව දී ඇත.

එවැනි වෙනස් ත්‍රිකෝණ දෙකක් තිබෙන බව පෙන්වා, ඒ එක එකක් සඳහා AC හි දිග සොයන්න.

(*c*) $\sin^{-1}\left[(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}}\right] + \tan^{-1}(e^x) = \tan^{-1}(2)$ සමීකරණය විසඳන්න.

* * *