ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර(උසස් පෙළ),2013 අගෝස්තු

සංයුක්ත ගණිතය I | පැය තුනයි.

B කොටස

11)(a). $f(x) = ax^3 + bx^2 - 11x + 6$ යැයි ගනිමු. මෙහි a,b $\in \mathbb{R}$ වේ. $(x-1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් වේ නම් හා $f(x)$ යන්න $(x-4)$ න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය -6 නම්, a හා b වල අගයන් සොයන්න. $f(x)$ හි අනෙත් ඒකජ සාධක දෙකත් සොයන්න.

(b). α හා β යනු $x^2 + bx + c = 0$ මූල යැයි ද , γ හාδ යනු $x^2 + mx + n = 0$ සමීකරණයේ මූල යැයි ද ගනිමු. මෙහි a,b,m,n $\in \mathbb{R}$ වේ.

I. b හා c ඇසුරෙන් $(\alpha - \beta)^2$ සොයා , එනයින් ,m හා n ඇසුරෙන් $(\gamma - \delta)^2$ ලියා දක්වන්න. $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ නම් $b^2 - 4c = m^2 - 4n$බව අපෝහනය කරන්න.

II. $(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta) = (c - n)^2 + (b - m)(bn - cm)$ බව පෙන්වන්න.
$x^2 + bx + c = 0$ හා $x^2 + mx + n = 0$ යන සමීකරණ වලට පොදු මූලයක් ඇත්තේ $(c - n)^2 = (m - b)(bn - cm)$ ම නම් පමණක් බව අපෝහණය කරන්න.
$x^2 + 10x + k = 0$ හ $x^2 + kx + 10 = 0$ සමීකරණ වලට පොදු මූලයක් ඇත. මෙහි k යනු තාත්වික නියතයකි . එහි අගය සොයන්න.

12)(a). සිසුන් 15 ක ශිෂ්‍ය සභාවක විද්‍යා සිසුන් 3 දෙනෙකුගෙන්, කලා සිසුන් 5 දෙනෙකුගෙන් හා වාණිජ සිසුන් 7 දෙනෙකුගෙන් සමන්විතය. ව්‍යාපෘතියක වැඩ කිරීම සඳහා මෙම ශිෂ්‍ය සභාවෙන් සිසුන් 6 දෙනෙකු තෝරා ගැනීමට අවශ්‍යව ඇත.

I. සිසුන් 15 දෙනාම තෝරා ගැනීම සඳහා සුදුසු නම්,
II. කිසියම් සිසුන් දෙදෙනෙකුට එකට වැඩ කිරීම සඳහා අවසර නොමැති නම්,
III. එක් එක් විෂය ධාරාවෙන් සිසුන් දෙදෙනෙකු බැගින් තේරීමට අවශ්‍ය නම්,

මෙය සිදු කළ හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

ඉහත III යටතේ තෝරාගත් කණ්ඩායමක් , එම කණ්ඩායමෙහි විද්‍යා විෂය ධාරාවෙන් වූ සිසුන් දෙදෙනාට එක ළඟ වාඩි වීමට අවසර නොමැති නම් , වෘත්තාකාර මේසයක වාඩි කළ හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

(b). $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $u_r = \frac{3(6r+1)}{(3r-1)^2(3r+2)^2}$ හා $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $s_n = \sum_{r=1}^{n} u_r$ යැයි ගනිමු.
$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $u_r = \frac{A}{(3r-1)^2} + \frac{B}{(3r+2)^2}$ වන පරිදි $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා A හා B නියත වල අගයන් සොයන්න.
එ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $s_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{(3n+2)^2}$ බව පෙන්වන්න.
$\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේද? ඔබගේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.
$\left|s_n - \frac{1}{4}\right| < 10^{-6}$ වන පරිදි වූ $n \in \mathbb{Z}^+$ හි කුඩාතම අගය සොයන්න.

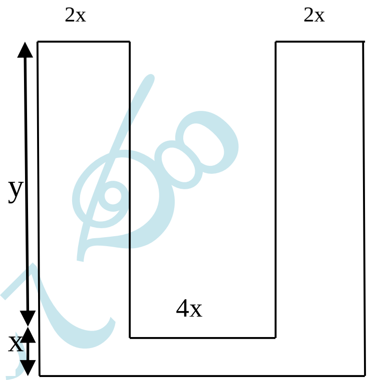
13)(a). $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු.
$Q^T Q = \lambda I$ වන පරිදි වූ $\lambda \in \mathbb{R}$ හි අගය සොයන්න; මෙහි Q^T යනු Q න්‍යාසයෙහි පෙරළුම වන අතර I යනු 2×2 ඒකක න්‍යාසය වේ.
එනයින් , $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ න්‍යාසයෙහි ප්‍රතිලෝමය සොයන්න.
A යනු AP=PD වන පරිදි වූ 2×2 න්‍යාසයක් යැයි ගනිමු ; මෙහි $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ වේ A සොයන්න.

(b). $z = x + iy$ යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් යැයි ගනිමු; මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$
$|z|^2 = z\bar{z}$ හා $z - \bar{z} = 2iImz$ බව පෙන්වන්න.
එනයින්, $|z - 3i|^2 = |z|^2 - 6Imz + 9$ හා $|1 + 3iz|^2 = 9|z|^2 - 6Imz + 1$ බව පෙන්වන්න.
$|z - 3i| > |1 + 3iz|$ වන්නේ $|z| < 1$ නම් පමණක් බව අපෝහනය කරන්න.
$|z - 3i| > |1 + 3iz|$ හා $\text{Arg}z = \frac{\pi}{4}$ අවශ්‍යතා සපුරාලන පරිදි වූ z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය ආගන්ඩ් සටහනෙහි අඳින්න.

14).(a). $x \neq 1$ සඳහා $f(x) = \frac{x^2}{x^3-1}$ යැයි ගනිමු.

$x \neq 1$ සඳහා $f'(x) = -\frac{x(x^3+2)}{(x^3-1)^2}$ බව පෙන්වා , $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයට (0,0) හා $\left(-2^{1/3}, \frac{-4^{1/3}}{3}\right)$ හි දී හැරුම් ලක්ෂ්‍ය හා ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින්,$y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

(b). මායිම් සෘජුකෝණික ලෙස හමු වන සරළ රේඛා ඛණ්ඩ අටකින් සමන්විත ගෙවත්තක් රූප සටහනේ දැක්වේ.ගෙවත්තේ මාන මීටර වලින් එහි දක්වා ඇත.
ගෙවත්තේ ව.ඵ 800m² බව දී ඇත.x ඇසුරෙන් y ප්‍රකාශ කර , මීටර වලින් මනින ලද ගෙවත්තේ පරිමිතිය P යන්න $p = \frac{800}{x} + 10x$ මගින් දෙනු ලබන බව ද,පරිමිතිය සඳහා වන මෙම සූත්‍රය වලංගු වන්නේ $0 < x < 10$ සඳහා පමණක් බවද පෙන්වන්න.
ඒ නයින් , ගෙවත්තේ පරිමිතියෙහි අවම අගය සොයන්න.



15).(a). කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int x^2 \sin^{-1} x \, dx$ සොයන්න.

(b). භින්න භාග භාවිත්යෙන් $\int \frac{x^2+3x+4}{(x^2-1)(x+1)^2} dx$ සොයන්න.

(c). $a^2 + b^2 > 1$ වන පරිදි a,b ∈ ℝ යැයි ද,

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a+cosx}{a^2+b^2+a\,cosx+b\,sinx} dx$ හා $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b+sinx}{a^2+b^2+a\,cosx+b\,sinx} dx$ යැයි ද ගනිමු.

$aI + bJ = \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$bI - aJ$ සැළකීමෙන් I හා J හි අගයන් සොයන්න.

16). x² + y² - 2x - 2y + 1 = 0 සමීකරණය මඟිනි දෙනු ලබන S වෘත්තයෙහි කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක හා අරය සොයා, xy තලය මත S වෘත්තයේ දළ සටහන අඳින්න.
P යනු S වෘත්තය මත O මූලයෙහි සිට ඈතින්ම පිහිටි ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. P හි ඛණ්ඩාංක ලියා දක්වා S වෘත්තයට P ලක්ෂ්‍යයෙහිදී වූ ස්ප්ර්ශක රේඛාව වන L හි සමීකරණය x+y = 2+$\sqrt{2}$ මඟින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.
L රේඛාව ස්පරශ කරන s'වෘත්තයක් , S වෘත්තය P ගෙන් ප්‍රභින්න ලක්ෂයක දී බාහිරව ස්පර්ශ කරයි. (h,k) යනු s' වෘත්තයෙහි කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක යැයි ගනිමු.

L රේඛාව අනුභද්ධයෙන් O හි හා s' හි කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සලකා බැලීමෙන් , $h+k < 2+\sqrt{2}$ බව පෙන්වන්න.
S' හි කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංකය $h^2 - 2hk + k^2 + 4\sqrt{2}(h+k) = 8(1+\sqrt{2})$ සමීකරණය සපුරාලනබව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

17)(a). $cos\alpha + cos\beta - cos\gamma - \cos(\alpha+\beta+\gamma) \equiv 4cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$ සර්වසාම්‍ය සාධනය කරන්න.

(b). $f(x) = 2sin^2\frac{x}{2} + 2\sqrt{3}sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} + 4cos^2\frac{x}{2}$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ යන්න $a\sin(x+\theta)+b$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $a(>0), b$ හා θ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$1 \leq f(x) \leq 5$ බව අපෝහනය කරන්න.

$-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}$ සඳහා $y = f(x)$ හි ප්‍රස්ථාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

(c). $p > 2q > 0$ යැයි ගනිමු.
ABC ත්‍රිකෝණයක BC,CA හා AB පාදවල දිග පිළිවෙලින් $p+q, p$ හා $p-q$ වේ.
$sinA - 2sinB + sinc = 0$ බව පෙන්වා $\cos\frac{A-C}{2} = 2\cos\frac{A+C}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න.