ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර(උසස් පෙළ),2012 අගෝස්තු

සංයුක්ත ගණිතය I | පැය තුනයි.

B කොටස

11)(a). $f(x) = x^2 + 2kx + k + 2$ යැයි ගනිමු. මෙහි k යනු තාත්වික නියතයකි.

I. $f(x)$ යන්න $(x-a)^2 + b$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි a හා b යනු k ඇසුරෙන් නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

කලනය භාවිතයෙන් තොරව , $f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යය සොයා මෙම ලක්ෂ්‍යය අවමයක් බව පෙන්වන්න.

$f(x)$ හි අවම අගය k ඇසුරෙන් සොයන්න.

එනයින්, $y = f(x)$ වක්‍රය,

i. $-1 < k < 2$ නම් , x-අක්ෂයට ඉහළින් මුළුමනින්ම පිහිටින බව ,

ii. $k = -1$ හෝ $k = 2$ නම්, x-අක්ෂය ස්පර්ශ අරන බව,

iii. $k < -1$ හෝ $k > 2$ හෝ නම්, x-අක්ෂය ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකකදී කපන බව පෙන්වන්න.

II. $k < -2$ ම නම් පමණක් m හි සියලු තාත්වික හා පරිමිත අගයන් සඳහා $y = mx$ සරල රේඛාව $y = f(x)$ වක්‍රය තාත්වික හා ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකකදී ඡේදනය කරන බව පෙන්වන්න.

(b). $g(x) \equiv x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 2$ යැයි ගනිමු.

ශේෂ ප්‍රමේයය නැවත නැවත යොදා ගනිමින් $(x+1)^2$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.

$g(x)$ යන්න $(x-a)^2(x^2 + bx + c)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි a,b හා c නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.
x හි සියලු තාත්වික අගයන් සඳහා $g(x) \geq 0$ බව අපෝහනය කරන්න.

12)(a). සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $12x^2 + 1 \equiv A(2x-1)^3 + B(2x+1)^3$ වන පරිදි A හා B නියත සොයන්න.
එනයින් $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $u_r = f(r) - f(r+1)$, වන පරිදි $f(r)$ නිර්ණය කරන්න ; මෙහි $u_r = \frac{12r^2+1}{(2r-1)^3(2r+1)^3}$ වේ.
$\sum_{r=1}^{n} u_r = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)^3}$ බව පෙන්වන්න.
$\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා, $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ හි අගය සොයන්න.

(b). එකම රූපයක, $y = |2x-1|$ හා $y = |x| + \frac{5}{3}$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.
එ නයින්, $3|x| \geq |6x-3| - 5$ සඳහා වන x හි අගය කුලකය සොයන්න.
ඕනෑම $k \in \mathbb{R}$ සඳහා $y = |x| - k$ හි ප්‍රස්තාරය එකම රූපයේ සලකමින්, l හි කවර අගයක් සඳහා $3|x| = |6x-3| + l$ සමීකරණයට තාත්වික විසඳුම් එකක් පමණක් තිබේ දැයි සොයන්න.

13)(a). $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ යනු 2×2 න්‍යාසයක් යැයි ගනිමු.
$A^2 - 3A + 2I = 0$ බව පෙන්වන්න; මෙහි I යනු 2×2 ඒකක න්‍යාසය හා O යනු 2×2 ශූන්‍ය න්‍යාසය වේ. ඒ නයින්, A^{-1} සොයන්න.
$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ යනු 2×2 න්‍යාසයක් යැයි ගනිමු.
$BA = B$ බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින් හො වෙනත් අයුරකින් , $BC = 0$ වන පරිදි c නම් න්ශ්ගූන්‍ය 2×2 න්‍යාසයක් සොයන්න.

(b). Z යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් යැයි ගනිමු.
$|Z|^2 = Z\bar{Z}$ හා $|Z| \geq ReZ$ බව සාධනය කරන්න.
එ නයින්,
ඕනෑම Z_1 හා Z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් සඳහා $|Z_1| - |Z_2| \leq |Z_1 - Z_2|$ බව පෙන්වන්න.
$|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$ බව අපෝහනය කරන්න.
$|Z - i| < \frac{1}{2}$ නම්, $\frac{1}{2} < |Z| < \frac{3}{2}$ බව පෙන්වන්න.
$|Z - \mathrm{i}| \leq \frac{1}{2}$ හා $\frac{\pi}{2} \leq arg\, Z \leq \frac{2\pi}{3}$ සඳහා Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ආර්ගන්ඩ් සටහනේ නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය කුලකය අඩංගු R පෙදෙස අඳුරු කරන්න.

14)(a). පළමු ව්‍යුත්පන්නය පමණක් සලක්මින් $\frac{x^3}{x^4+27}$ හි අවම හා උපරිම අගයන් සොයන්න.

$y = \frac{x^3}{x^4+27}$ හි දළ ප්‍රස්තාරයක් අඳින්න.
එ නයින්,

I. තාත්වික සමපාත මූල දෙකක් තිබේ දැයි,
II. තාත්වික සමපාත මූල තුනක් තිබේ දැයි,
III. තාත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් තිබේ දැයි,
IV. තාත්වික මූල නොතිබේ දැයි

සොයන්න ; මෙහි k තාත්වික වෙයි.

(b). AB = a හා BC = b(< a) සහිත ABCD සෘජුකෝණාස්‍රයක් සලකමු. P යනු CD මත විචලනය විය හැකි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු. $AP + PB$ හි දිග $L(x)$ වෙයි.මෙහි $DP = x$.
$L(x) = \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{(a-x)^2 + b^2}$ බව පෙන්වන්න.
$L(x)$ හි අවම දිග හා මෙම දිගට අනුරූප P හි පිහිටුම CD මත සොයන්න.
$L(x)$ හි උපරිම දිගද සොයන්න.

15)(a). $\int_0^{\pi}(sin^3x - cos^3x)\,dx = \frac{8}{3}$ බව පෙන්වන්න.

(b). කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් හෝ වෙනත් අයුරකින් හෝ $\int x^3\, tan^{-1}x\, dx$ සොයන්න.

(c). භින්න භාග යොදාගනිමින් $\int \frac{2x^2-3}{(x-2)^2(x^2+1)}$ සොයන්න.

16)(a). සමාන්තර නොවන $l_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ හා $l_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ යන සරල රේඛා අතර කෝණ සමච්ඡේධකවල සමීකරණ සොයන්න.
2x - 11y – 10 = 0 හා 10x + 5y – 2 = 0 මගින්දෙනු ලබන සරල රේඛා දෙක අතර සුළු කෝණයේ සමච්ඡේධකය , 4x - 7y – 8 = 0 හා 8x + y – 4 = 0 මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා දෙක අතර මහා කෝණයේ සමච්ඡේධකයම බව පෙන්වන්න.

(b). g හා f හි සියලු අගයන් සඳහා $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy - r^2 = 0$ වෘත්තය $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ වෘත්තයේ පරිධිය සමච්ඡේධනය කරන බව පෙන්වන්න.
y + 5 = 0 සුළු රේඛාව ස්පර්ශ කරමින් හා $x^2 + y^2 - 4 = 0$ වෘත්තයේ පරිධිය සමච්ඡේධනය කරමින් (1,1) ඔස්සේ වෘත්ත දෙකක් ඇඳිය හැකි බව පෙන්වන්න.
මෙම වෘත්ත දෙකෙහි සමීකරණ සොයන්න.
17)(a). ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්,
$\frac{a}{sin\,A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin c}$ බව සාධනය කරන්න.

$a = (b-c)cos\frac{A}{2}cosec\frac{B-C}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(b). θ හි ඕනෑම තාත්වික අගයක් සඳහා $tan\theta - 2\,tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ ප්‍රකාශනයට -7 හා -1 අතර කිසිම අගයක් ගත නොහැකි බව පෙන්වන්න.

(c). $5\,cos^2\theta + 18\,cos\theta sin\theta + 29\,sin^2\theta$ යන්න, $a + b\cos(2\theta + \alpha)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි a හා b යනු නියත වන අතර α යනු θ වලින් ස්වායත්ත කෝණයක් වෙයි.
එනයින් හෝ වෙනත් අයුරකින් හෝ,
$8(cosx + sinx)^2 + 2(cosx + 5sinx)^2 = 19$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

ඉසුරු ශාස්ත්‍ර