ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව

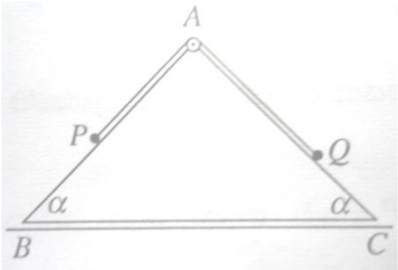
අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර(උසස් පෙළ),2011 අගෝස්තු

සංයුක්ත ගණිතය II | පැය තුනයි

B කොටස

11)(a). පහත් කණු තුනක් ඉහළම ලක්ෂ්‍ය වන A , B හා C තිරස් තලයක වූ පාදයක දිග a වන සමපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ වල පිහිටා ඇත. සුළඟක් සතත u වේගයෙන් $\overrightarrow{AC}$ හි දිශාවට හමා යයි. සුළඟට සාපේක්ෂව $v(> u)$ වේගයක් ඇති කුරුල්ලෙක් AB දිගේ A සිට B දක්වා ද , BC දිගේ B සිට C දක්වා ද පියාඹයි. ඒ නයින් , A සිට C දක්වා B හරහා වූ ගමන සඳහා ගතවන මුළු කාලය $\frac{4a}{u+\sqrt{4v^2-3u^2}}$ බව පෙන්වන්න.

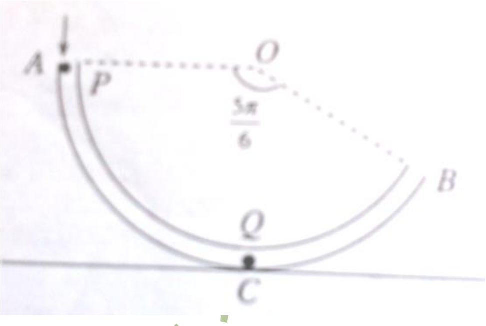
(b). ස්කන්ධය 2m වූ සුමට කූඤ්ඤයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය ඔස්සේ යන ABC ත්‍රිකෝණාකාර සිරස් හරස්කඩෙහි A ශීර්ෂයේ දී කුඩා සුමට කප්පියකට සවිකර ඇත .
BC ඔස්සේ යන මුහුනත අවල සුමට තිරස් මේසයක් මත තබා ඇත. AB හා AC යනු අදාල මුහුණත්වල වැඩිතම බෑවුම් රේඛා යැයිද , ABC = ACB = α යැයිද දී ඇත. ස්කන්ධ පිළිවෙලින් m හා λm $(\lambda > 1)$ වූ P හා Q සුමට අංශු දෙකක් සහිත අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට අමුනා ඇත . තන්තුව කප්පිය මතින් යන අතර , P හා Q අංශු , පිළිවෙලින් AB හා AC මත රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි තන්තුව නුබුරුල්ව පවතින අයුරින් තබා ඇත.



පද්ධතිය නිසලතාවෙන් මුදාහැරේ , P හා Q අංශු සඳහා පිළිවෙලින් BA හා AC ඔස්සේ ද, පද්ධතියට තිරසට ද චලිත සමීකරණ ලබා ගන්න.
කූඤ්ඤයට සාපේක්ෂව P හා Q එක එකක ත්වරණයෙහි විශාලත්වය $\frac{(\lambda-1)(\lambda+3)g\,sin\alpha}{(\lambda+1)[(\lambda+3)-(\lambda+1)cos^2\alpha]}$ බව පෙන්වන්න.

Q අංශුව C වෙත එළඹෙන විට තන්තුව හදිසියේම කැඩී යයි. P අංශුව කප්පිය වෙත ලංගාවිනොමැති බව උපකල්පනය කරමින් , තන්තුව කැඩීයාමෙන් මොහොතකට පසු , කූඤ්ඤයට සාපේක්ෂව P හි ත්වරණයේ විශාලත්වය ලියා දක්වන්න.

12). අරය a වූ කේන්ද්‍රය O හි $\frac{5\pi}{6}$ කෝණයක් ආපාතනය කරන්නා වූ , වෘත්තාකාර චාපයක් හැඩැති සුමට සිහින් ACB බටයක්, OA තිරස් ව ද , බටයෙහි පහළම ලක්ෂ්‍යය වන C අචල තිරස් පොළොවක ස්පර්ශ කරමින් ද සිරස් තලයක රූප සටහනේ පෙන්වා ඇති පරිදි සවි කර ඇත.



ස්කන්ධය m වූ සුමට P අංශුවක් $\sqrt{2ga}$ වේගයෙන් A කෙළවරේදී බටය තුළට සිරස්ව පහළට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබෙයි.

OP රේඛාව OA සමඟ $\theta\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදන විට P අංශුවේ වේගය $\sqrt{2ga(1+sin\theta)}$ බව ද , P අංශුව මත බටයෙන් ඇති වන ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $mg(2+3\,sin\theta)$ බව ද පෙන්වන්න.

P අංශුව C වෙත එළඹෙන විට, බටය තුළ C හි නිසලව ඇති ස්කන්ධය m වූ සුමට Q නම් තවත් අංශුවක් හා ගැටෙයි. P හා Q අංශු අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වෙයි. ගැටුමට මොහොතකට පෙර P අංශුවේ වේගය සොයා, ගැටුමට මොහොතකට පසුව P හා Q අංශුවල වේග පිළිවෙලින් $\frac{1}{2}\sqrt{ga}$ හා $\frac{3}{2}\sqrt{ga}$ බව පෙන්වන්න.

P අංශුව කිසිවිටෙක බටය හැර නොයන බවත් , Q අංශුව $\frac{1}{2}\sqrt{5ga}$ වේගය සහිතව B කෙළවර වෙත එළඹෙන බවත් පෙන්වන්න.

Q අංශුව බටය හැරගිය පසු එය පොළොවෙහි සිට ළඟාවන උපරිම උස සොයන්න.

13). ස්වාභාවික දිග l වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරකට ස්කන්ධය m වූ P නම් අංශුවක් ඈඳා ඇත. තන්තුවෙහි අනෙක් කෙළවර තිරස් පොළොවක සිට $4l$ උසින් පිහිටි අචල O ලක්ෂ්‍යයකට සවිකර ඇත. P අංශුව සමතුලිතතාවේ එල්ලෙන විට තන්තුවේ විතතිය l වේ.
තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථ මාපාංකය mg බව පෙන්වන්න.

P අංශුව O හි තබා , $\sqrt{gl}$ ප්‍රවේගයකින් සිරස් ව පහළට ප්‍රක්ෂේපණය කරේ. P අංශුව l දුරක් වැටුනු විට එහි ප්‍රවේගය සොයන්න.
තන්තුවේ දිග $2l + x$ වන විට , P අංශුව සඳහා චලිත සමීකරණ ලියා දක්වා , සුපුරුදු අංකනයෙන් $\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0$ බව පෙන්වන්න.; මෙහි $-l \le x \le 2l$ වේ.

ඉහත සමීකරණයෙන් $c(> 0)$ නියතයක් වන $\dot{x}^2 = \frac{g}{l}(c^2 - x^2)$ දෙනු ලැබේ යැයි උපකල්පනය කරමින් , c හි අගය සොයන්න.

P පොළොවට එළඹෙන විට ක්ෂණිකව නිශ්චල වන බව පෙන්වා , O සිට පොළොවට එළඹීමට ගතවන කාලය $\frac{1}{3}(3\sqrt{3} - 3 + 2\pi)\sqrt{\frac{l}{g}}$ බව පෙන්වන්න.

14)(a). a හා b දෛශික දෙකක තිත් ගුණිතය වන a.b අර්ථ දක්වන්න.
a,b,c හා d ඕනෑම දෛශික හතරක් සඳහා
$(a + b).(c + d) = a.c + b.c + a.d + b.d$ යැයි උපකල්පනය කරමින් $|a + b|^2 = |a|^2 + 2(a.b) + |b|^2$ බව පෙන්වන්න.

$|a - b|^2$ සඳහා අනුරූප ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වන්න.

$|a + b|^2 = |a - b|^2$ නම් $a.b = 0$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් සමාන්තරාස්‍රයේ විකර්ණ සමාන නම් එය සෘජුකෝණාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

(b). A, B, C, D, E හා F යනු පැත්තක දිග 2a වන සවිධි ෂඩස්‍රයක වාමාවර්ත අතට ගන්නා ලද ශීර්ෂ වේ. විශාලත්වය P,2P,3P,4P,5P,L,M හා N වන බල පිළිවෙලින් AB,CA,FC,DF,ED,BC,FA හා FE දිගේ , අක්ෂර අනුපිළෙවෙලින් දැක්වෙන දිශා අතට ක්‍රියා කරයි.
පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ පවතී නම්, P ඇසුරෙන් L,M හා N සොයන්න.

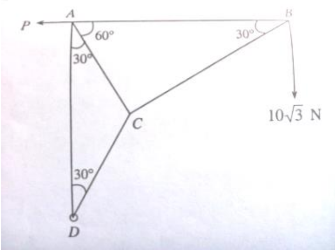
15)(a). AB හා BC ඒකාකාර දඬු දෙකක් දිගින් සමාන වේ. AB හි බර 2w වන අතර BC හි බර w වේ. දඬු B දී සුමට ලෙස අසව් කර ඇති අතර දඬු වල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කර ඇත. A හා C සුමට තිරස් මේසයක් මත සිටින සේ පද්ධතිය සිරස් තලයක සමතුලිතතාවේ ඇත.

$A\hat{B}C = 2\theta$ නම්, තන්තුවේ ආතතිය $\frac{3}{2}w\,tan\theta$ බව පෙන්වන්න.

B හි දී ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය හා එය තිරස සමඟ සාදන කෝණය සොයන්න.

(b). $AB, BC, CD, DA,$ හා AC සැහැල්ලු දඬු පහක් , රූප සටහනෙහි දක්වා ඇති පරිදි රාමුකට්ටුවක් සෑදෙන ආකාරයට , ඒවායේ කෙළවරවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත.

$A\hat{B}C = A\hat{D}C = D\hat{A}C = 30°$ හා $B\hat{A}C = 60°$ වේ. රාමුකට්ටුව D හි දී සුමට ලෙස අසව් කර ඇති තර ,B හි දී නිව්ටන් $10\sqrt{3}$ ක බරක් දරයි. AB තිරස් වන පරිදි රාමුකට්ටුව සිරස් තලයක තබා ඇත්තේ A හි දී වූ නිව්ටන් P තිරස් බලයක් මඟිනි.



i. P හි අගය සොයන්න.
ii. D හි ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.
iii. බෝ අංකනය භාවිතයෙන් රාමුකට්ටුව සඳහා ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක් ඇඳ ආතති හා තෙරපුම් වෙන්කොට දක්වමින් දඬු සියල්ලෙහි ප්‍රත්‍යාබල සොයන්න.

16). අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය , එහි සමමිතික අක්ෂය මත අර්ධගෝලයේ ආධාරකයේ සිට $\frac{3}{8}a$ දුරකින් පිහිටින බව පෙන්වන්න.

ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලාකාර කවචයක අභ්‍යන්තර හා භාහිර අරයන් a හා $b\ (> a)$ වේ. කේන්ද්‍රයේ සිට සමමිතික අක්ෂය දිගේ එහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර $\frac{3(a+b)(a^2+b^2)}{8(a^2+b^2+ab)}$ බව පෙන්වන්න.

ස්වකීය වක්‍ර පෘෂ්ඨය තිරස් රළු පොළොවක් හා සමාන ලෙස රළු සිරස් බිත්තියක් සමඟ ස්පර්ශ වන පරිදි මෙම අර්ධ ගෝලාකාර කවචය සමතුලිතතාවේ පවතී. සම්තුලිතය සීමාකාරී නම් තිරසට ආධාරකයේ ආනතිය $\sin^{-1}\left\{\frac{8\mu b(1+\mu)(a^2+b^2+ab)}{3(1+\mu^2)(a+b)(a^2+b^2)}\right\}$ බව පෙන්වන්න ; මෙහි μ යනු කවචය හා රළු පෘෂය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ.

17)(a). හිස වැටීමේ සම්භාවිතාව p වූ නැඹුරු කාසියකින් නිමල්, සුනිල් හා පියල් ක්‍රීඩාවක යෙදෙති. නමල්, සුනිල් හා පියල් එම පටිපාටියට මෙම කාසිය උඩ දමති. අගය ලබා ගත් පළමුවෙනි තැනැත්තා ක්‍රීඩාව දිනයි.
නිමල් ඔහුගේ

i. දෙවන වාරයේදී ,
ii. තෙවෙන වාරයේදී ,

ක්‍රීඩාව දිනීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
ඒ නයින් අවසානයේදී , නිමල් ක්‍රීඩාව දිනීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

කාසියේ හිස වැටීමට වඩා අගය වැටීමට වැඩි භව්‍යතාවක් ඇත්නම් , නිමල්ට ක්‍රීඩාව දිනීම සඳහා 50% ට වඩා ඉඩක් ඇති බව අපෝහනය කරන්න.

(b). $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ නිරීක්ෂණ කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙලින් $\bar{x}$ හා s_x වේ. a හා b නියත වන $y_i = a + bx_i$ රේඛීය පරිමානය යොදාගෙන , $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ නිරීක්ෂණ කුලකය $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ කුලකයට පරිණාමනය කර ඇතයි සිතමු.
$\bar{y} = a + b\bar{x}$ හා $s_y^2 = b^2 s_x^2$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\bar{y}$ හා s_Y යනු $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය වේ.

i. {1,2,3,4,5,6,7} නිරීක්ෂණක් කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය සොයන්න.

ඒ නයින්
(α). {2.01, 3.02, 4.03, 5.04, 6.05, 7.06, 8.07} නිරීක්ෂණක් කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය ,
(β). මධ්‍යන්‍යය 5 හා සම්මත අපගමනය 6 වන අගය හතක් සොයන්න.

ii. ලුණු , මලුවල අසුරනු ලබන තර නිෂපාදකයා ඒවා එක එකක 25kg ක් ඇති බව සඳහන් කරයි. නියම බර නොදන්නා එවැනි මලු 80 ක් සඳහා පහත දැක්වෙන තොරතුරු දී ඇත;

$\sum_{i=1}^{80}(x_i - 25) = 27.2$ හා $\sum_{i=1}^{80}(x_i - 25)^2 = 85.1$; මෙහි $x_i (i = 1,2, \dots, 80)$ මගින් i වෙනි මල්ලේ නියම බර දැක්වේ. සුදුසු රේඛීය පරිමානයක් යොදාගෙන හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ මලු අසූවෙහි නියම බරෙහි මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව සොයන්න.