ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර(උසස් පෙළ),2011 අගෝස්තු

සංයුක්ත ගණිතය I

පැය තුනයි.

B කොටස

11)(a). α හා β යනු $ax^2 + bx + c = 0$, වර්ග සමීකරණයේ මූල යැයි ගනිමු; මෙහි a,b හා c යනු තාත්වික සංඛ්‍යා වේ.
α හා β දෙකම ,
I. $b^2 - 4ac \geq 0$ ම නම් පමණක් තාත්විකද
II. $b = 0$ හා $ac > 0$ ම නම් පමණක් හුදෙක් අතාත්විකද බව පෙන්වන්න.
මූල α^2 හා β^2 වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න.

එක්කො α හා β දෙකම තාත්වික, නැත්නම් α හා β යන දෙකම හුදෙක් අතාත්වික, ම නම් පමණක් මෙම වර්ගජ සමීකරණයේ මූල දෙකම තාත්වික බව පෙන්වන්න.

(b). $f(x) = x^3 - 3abx - (a^3 + b^3)$ යැයි ගනිමු; මෙහි a හා b යනු තාත්වික සංඛ්‍යා වේ. $(x - a - b)$ යනු $f(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න. $f(x)$ හි අනෙත් සාධකය වර්ගජ ආකාරයෙන් සොයන්න.

එනයින් හෝ වෙනත් අයුරකින් හෝ , a හා b ප්‍රභින්න නම්, $f(x) = 0$ ට තාත්වික මූල එකක් පමණක් තිබෙන බව පෙන්වන්න.

$x^3 - 9x - 12 = 0$ ට තාත්වික මූල එකක් පමණක් තිබෙන බව අපෝහනය කර, එය සොයන්න.

12)(a). $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $u_r = \frac{1}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$ යැයි ගනිමු.
r ඇසුරෙන් $\frac{u_{r+1}}{u_r}$ සොයන්න.
ඒ නයින්, $r = 1,2,3,, ...$ සඳහා $(2r-1)u_r - (2r+1)u_{r+1} = 4u_{r+1}$ බව පෙන්වන්න.
$\sum_{r=1}^{n} u_r = \frac{1}{12} - \frac{1}{4(2n+1)(2n+3)}$ බව අපෝහනය කරන්න.
$\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(b). $y = |2x - 8|$ හි ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

ඒ නයින්, $y = -|2x - 8|$ හි ප්‍රස්තාරය අඳින්න.
$y = 4 - |2x - 8|$ හා $y = |2x - 10|$ හි ප්‍රස්තාර එකම රූප සටහනක අඳින්න.
ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ ,$|2x - 10| + |2x - 8| \leq 4$ අසමානතාව සපුරාලනු ලබන x හි තාත්වික අගය කුලකය ලබා ගන්න.

13)(a). $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ හා $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $A(\lambda A + \mu I) = I$ වන අයුරින් λ හා μ අගයන් සොයන්න; මෙහි I යනු 2×2 ඒකක න්‍යාසය වේ.
ඒ නයින්, A^{-1} සොයන්න.

(b). P,Q හා R යනු ආර්ගන්ඩ් සටහනේ පිළිවෙලින් Z_0, Z_1 හා Z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය තුනක් යැයි ගනිමු.
PQ = PR ද, θ යනු PQ සිට PR ට වාමාර්ත ලෙස මනින ලද කෝණය ද නම්
$Z_2 - Z_0 = (Z_1 - Z_0)(cos\theta + isin\theta)$ බව පෙන්වන්න.

වාමාවර්ත ලෙස අන්නා ලද A,B,C හා D ලක්ෂ්‍ය ආර්ගන්ඩ් සටහනේ සමචතුරාස්‍රයක් සාදයි. A හා B ලක්ෂ්‍ය මඟින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා පිළිවෙලින් 1- i හා Z යැයි ගනිමු. C හා D ලක්ෂ්‍ය මඟින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා Z ඇසුරෙන් සොයන්න.

AC = 2 වන අයුරින් C විචලනය වෙයි නම්, B හි පථය ආර්ගන්ඩ් සටහනෙහි සොයන්න.

14)(a). $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx$ යැයි ගනිමු; මෙහි a හා b යනු තාත්වික නියත වේ. $f'(3) = 12$ හා $f''(3) = 18$ යැයි සිතමු; මෙහි f' හා f'' ට සුපුරුදු තේරුම් තිබෙයි.
a හා b හි අගයන් සොයන්න.
a හා b හි මෙම අගයන් සඳහා $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න. ඒ නයින් , $2x^2 + ax + b = \frac{3}{x}$ සමීකරණයේ විසඳුම් ගණනය කරන්න.

සමචතුරස්‍රාකාර පතුලක් සහිත සංවෘත සෘජුකෝණාස්‍රාකාර පෙට්ටියක් තුනී කාඩ්බෝඩ් වලින් සාදා ඇත. පෙට්ටියේ පරිමාව 8192 cm³ වෙයි. සමචතුරස්‍රාකාර පතුලෙහි පැත්තක දිග 4x cm යැයි ගනිමු. අරය x cm වන වෘත්තාකාර සිදුරක් ඉහළ සමචතුරස්‍රාකාර මුහුණතෙන් කපා ඉවත් කර ඇත. සිදුර සහිත පෙට්ටියේ පෘෂ්ඨ ව.ඵ A cm² වන යන්න, $A = (32 - \pi)x^2 + \frac{8192}{x}$ මඟින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින්, $x = \frac{16}{\sqrt[3]{32-\pi}}$ වන විට A අවම වන බව පෙන්වන්න.

15)(a). කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int_1^e x^{\frac{3}{2}} \ln x \, dx$ අගයන්න.

(b). $t = \tan x$ යයි ගනිමු.
$\cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$ හා $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$ බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින්, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4\cos 2x + 3\sin 2x + 5} dx = \frac{1}{12}$ බව පෙන්වන්න.

(c). a හා b යනු ප්‍රභින්න තාත්වික සංඛ්‍යා යැයි ගනිමු.
$x \in \mathbb{R} - \{a, b\}$ සඳහා $\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$ වන අයුරින් A හා B නියත සොයන්න.
ඉහත සමීකරණයේ x,a හා b සුදුසු ලෙස ප්‍රතිස්ථාපනය කරමින් , $\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ යන්න භින්න භාග ඇසුරෙන් ලියා දක්වා, ඒ නයින්, $\int \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx$ සොයන්න.

16)(a). $lx + my + 1 = 0$ සරල රේඛාව සමඟ සමද්විපාද සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයක් සාදන ලෙස මූල ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ එකිනෙකට ලම්භ වන සරල රේඛා දෙකෙහි සමීකරණ $(\ell - m)x + (\ell + m)y = 0$ හා $(\ell + m)x - (\ell - m)y = 0$ බව පෙන්වන්න.

(b). $s' \equiv x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ වෘත්තය , $s \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ වෘත්තය , S = 0 වෘත්තයෙහි විශ්කම්භයක කෙළෙවරවලදී ඡේධනය කරයි නම් , $2g^2 + 2f^2 - c = 2gg' + 2ff' - c'$ බව පෙන්වන්න.
විචල්‍යය වෘත්තයක් , $s_1 \equiv x^2 + y^2 - 25 = 0$ හා $S_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$ වෘත්ත , එක එකක විශ්කම්භයක කෙළවරවලදී ඒවා ඡේධනය කරයි. විචල්‍ය වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය $x + 2y + 2 = 0$ සරල රේඛාව මත පිහිටිනබව පෙන්වන්න.

17)(a). $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ සර්වසාම්‍යය යොදාගනිමින් හෝ වෙනත් අයුරකින් හෝ
$\cos^6\theta + \sin^6\theta = a + b\cos 4\theta$ වන අයුරින් a හා b තාත්වික නියත සොයන්න.
ඒ නයින් හෝ වෙනත් අයුරකින් හෝ ,

I. $y = 8(\cos^6 x + \sin^6 x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

II. $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin 4x$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(b). $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$ සමීකරණය විසඳන්න.