ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව	
අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර(උසස් පෙළ),2010 අගෝස්තු	
සංයුක්ත ගණිතය II	පැය තුනයි

01)(a). ස්කන්ධය M වූ P අංශුවක් පොළොව මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක සිට, $t = 0$ කාලයේදී u ප්‍රවේගයෙන් සිරස්ව ඉහළට ගුරුත්වය යටතේ ප්‍රක්ෂේප කෙරෙයි. එක එකක ස්කන්ධය ඉතා කුඩා $m(\ll M)$ වූ $P_1, P_2,$ හා P_3 නම් අංශු තුනක් පිළිවෙලින් $t = \frac{u}{2g}$,$t = \frac{u}{g}$ හා $t = \frac{3u}{2g}$ කාලවලදී P අංශුවට සාපේක්ෂව තිරස් ලෙස එකම අභිදිශාවට $2v, 3v$ හා $6v$ ප්‍රවේග වලින් P අංශුවේ සිට ප්‍රක්ෂේප කෙරේ .

P හි ප්‍රවේග සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරයක් අඳින්න. P_1, P_2 හා P_3 අංශු වල ප්‍රවේගයන්ගෙන් සිරස් සංරචක එක එකක් සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාර, P අංශුවේ ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරයේ කොටස් සමඟ සමපාත වන බව පෙන්වා , එම කොටස් හඳුනාදෙන්න.

P_1, P_2 හා P_3 අංශුවල ප්‍රවේගයන්ගේ තිරස් සංරචක එක එකක් සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාර වෙන වෙනම රූප සටහනක අඳින්න.

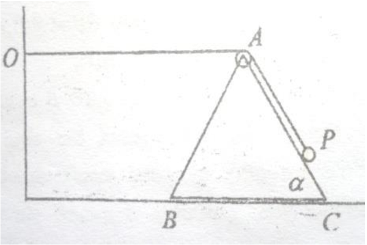
ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාර යොදා ගනිමින්,

i. අංශු හතර $t = \frac{2u}{g}$ එකම කාලයේදී පොළොවට ළඟා වන බව,

ii. P_1, P_2 හා P_3 අංශු තුන එකම ස්ථානයකදී පොළොවට වැටෙන බව ද පෙන්වන්න.

(b). මිනිසෙකුට නිශ්චල ජලයේ u වේගයෙන් පිහිනිය හැකිය. d පළලින් යුත් ගඟක් පොළොවට සාපේක්ෂව $v(< u)$ වේගයෙන් ගලා බසී. ගඟෙහි එක් ඉවුරක් මත පිහිටි P ලක්ෂ්‍යයක මිනිසා සිටින අතර, ඔහු ගඟේ අනෙක් ඉවුර මත, ගඟ ගලන දිශාවට විරුද්ධ දිශාවට Q ලක්ෂ්‍යයකට පිහිනා ආපසු P ලක්ෂ්‍යය වෙත පිහිනීමට බලාපොරොත්තු වෙයි. ඉවුර ඍජු හා එකිනෙකට සමාන්තර ද ,PQ ගඟ ගලන දිශාවට සමග $\alpha, \left(0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදයි ද නම් , සාපේක්ෂ ප්‍රවේග වල ත්‍රිකෝණ , එකම රූපසටහනක ඇඳීමෙන් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, Q ලක්ෂ්‍යයට පිහිනා ආපසු P ලක්ෂ්‍යයට පිහිනීමට මිනිසාට ගතවන කාලය $\frac{2d\sqrt{u^2\, cosec^2\alpha - v^2}}{u^2 - v^2}$ බව පෙන්වන්න.

02). සිරස් බිත්තියක් මත O ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර ඇති දිග l වන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් ,BC ඔස්සේ යන මුහුනත තිරස් අචල සුමට බිමක් මත පිහිටි ස්කන්ධය M වූ සුමට කූඤ්ඤයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය ඔස්සේ යන ABC ත්‍රිකෝණාකාර සිරස් හරස්කඩෙහි A ශීර්ෂයේ වූ අචල සුමට කප්පියක් මතින් යැවූ ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක්, තන්තුවෙහි අනෙත් කෙළවරට සම්බන්ධ කර ඇති අතර රූප සටහනේ පෙන්වා ඇති ආකාරයට OA තිරස් වන පරිදි තන්තුව නුබුරුල්ව තබා ඇත . F යනු බිමට සාපේක්ෂව කූඤ්ඤයේ ත්වරණයේ විශාලත්වයද , f යනු කූඤ්ඤයට සාපේක්ෂව P අංශුවේ ත්වරණයේ විශාලත්වයද නම්, f = F බව පෙන්වන්න.



AC තිරසට α කෝණයක් ආනත නම් , P අංශුව AC ඔස්සේද , පද්ධතිය සඳහා තිරසටද චලිත සමීකරණ ලියා දක්වන්න. එනයින් හෝ වෙනත් අයුරකින් හෝ $\frac{mg\ sin\alpha}{M+2m(1-cos\alpha)}$ ත්වරණයකින් කූඤ්ඤය බිත්තිය දෙසට චලනය වන බව පෙන්වන්න.

ආරම්භයේදි සිරස් බිත්තියේ සිට තිරස් දුර d දුරකින් B පිහිටන පරිදි පද්ධතිය නිසලතාවයේ පවතී . d ට වඩා PC විශාල නම් , $\sqrt{\frac{2d[M+2m(1-cos\alpha)]}{mg\ sin\alpha}}$ කාලයකට පසු $\sqrt{\frac{2dmg\ sin\alpha}{M+2m(1-cos\alpha)}}$ වේගයෙන් B බිත්තියෙහි ගැටෙන බව පෙන්වන්න. බිත්තියෙහි B ගැටීමට මොහොතකට පෙර බිමට සාපේක්ෂව P අංශුවේ වේගය $2\sqrt{\frac{dmg\ sin\alpha(1-cos\alpha)}{M+2m(1-cos\alpha)}}$ බවත් පෙන්වන්න.

03). P නම් සුමට අංශුවක් තිරසට α $(0 < \alpha < \pi/2)$ කෝණයකින් ආනතව u ප්‍රවේගයෙන් ගුරුත්වය යටතේ ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ. තිරස් ලෙස P අංශුව චලනය වන මොහොතේදී එය දිග l අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක එල්ලෙමින් නිශ්චලතාවයේ ඇති සමාන ස්කන්ධයෙන් යුත් Q නම් තවත් සුමට අංශුවක් සමඟ ගැටේ. තන්තුවේ අනෙත් කෙළවර තිරස් පීල්ලක් මත O ලක්ෂයකට සම්බන්ධ කර ඇත. P අංශුවේ පෙත හා OQ අඩංගු සිරස් තලයට පීල්ල ලම්භ වේ . ආරම්භයේදී P හා Q අංශු දෙක අතර තිරස් දුර $\frac{u^2 sin2\alpha}{2g}$ බව පෙන්වන්න. අංශු දෙක අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e නම් ගැටුමට මොහොතකට පෙර P හා Q අංශු දෙක පිළිවලින් $\frac{(1-e)u\ cos\alpha}{2}$ හා $\frac{(1+e)u\ cos\alpha}{2}$ ප්‍රවේග වලින් තිරස් ලෙස චලනය වීමට පටන් ගන්නා බව පෙන්වන්න. OQ යටිඅත් සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට Q අංශුවේ චලිත සමීකරණයේ OQ දිගේ සංරචකය ද Q අංශුව සඳහා ශක්ති සමීකරණය ලියා දක්වන්න .

$u\ cos\alpha \geq \frac{2\sqrt{5gl}}{1+e}$ නම් Q වෘත්ත චලිතය සම්පූර්ණ කරන බව පෙන්වන්න.

P ගමන් කරන ලද තිරස් දුර $\frac{(1-e)u^2 sin2\alpha}{4g}$ බව පෙන්වන්න. e = 3 නම් P ප්‍රක්ෂේපණ ලක්ෂ්‍යය වෙත ආපසු පැමිණෙන බව අපෝහණය කරන්න.

04). ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් ස්වාභාවික දිග l වූ ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරකට සම්බන්ධ කර ඇති අතර තන්තුවෙහි අනෙක් කෙළවර සීලිමක O අචල ලක්ෂයාකට සම්බන්ධ කර ඇත. λ යනු තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථ මාපාංකය නම් P අංශුව සමතුලිතතාවේ එල්ලෙන විට තන්තුවේ a විතතිය $a = \frac{mgl}{\lambda}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.
OP සිරස් වන ලෙස ද , එහි දිග $l + a + b$ ට සමාන වන ලෙස ද, තන්තුව වැඩි දුරටත් $b(> a)$ දිගකින් අදිනු ලැබේ. P අංශුව නිශ්චලතාවෙන් මුදා හැරෙයි . තන්තුවේ දිග $l + a + x$ වන විට, P අංශුවේ චලිත සමීකරණ ලියා දක්වා, සුපුරුදු අංකනයෙන්, $\ddot{x} + \frac{g}{a}x = 0$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $-a \leq x \leq b$ වේ. ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම $x = A\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t + B\sin\sqrt{\frac{g}{a}}t$ ආකාරයේ යැයි උපකල්පනය කරමින් A හා B සොයන්න.
$\alpha = sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$ වන $\sqrt{\frac{g}{a}}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ කාලයක් සඳහා P අංශුව සරල අනුවර්තී චලිතයේ යෙදෙන බව ද, සරල අනුවර්තී චලිතයෙන් P අංශුව ඉවත්වන මොහොතේදී, එහි ප්‍රවේගය උඩුඅතට $\sqrt{\frac{g}{a}(b^2 - a^2)}$ බව ද පෙන්වන්න.

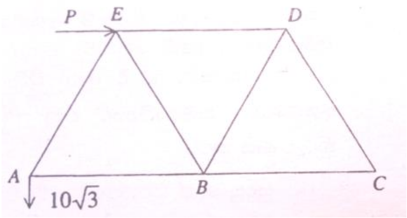
අනතුරුව P අංශුව ගුරුත්වය යටතේ චලනය වන බව ද , $b > a\sqrt{1 + \frac{2\lambda}{mg}}$ නම්, එය නිශ්ශුන්‍ය ප්‍රවේගයකින් සීලිමේ ගැටෙන බව ද පෙන්වන්න.

05)(a). පැත්තක දිග මීටර $2a$ වන ABCDEF සවිධි ෂඩස්‍රයක AB,BC,CD,ED,EF හා AF පාද දිගේ , විශාලත්ව පිළිවෙලින් නිව්ටන් $2p, p, 2p, 3p, 2p$ හා p වූ බල , අක්ෂර අනුපිළිවෙලින් දැක්වෙන දිශාඅතට ක්‍රියා කරයි. පද්ධතිය, විශාලත්වය නිව්ටන් මීටර $\sqrt{3}pa$ වූ බල යුග්මයක් සමඟ AC ඔස්සේ ක්‍රියා කරන නිව්ටන් $2\sqrt{3}pa$ වූ සම්ප්‍රයුක්ත බලයට තුල්‍ය බව සාධනය කරන්න.
පද්ධතිය තනි සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට තුල්‍ය නම් , මෙම සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ ක්‍රියා රේඛාවේ හා (අවශ්‍ය නම් දික්කරන ලද) FA හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය සොයන්න.
ඒ නයින්, පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ පවත්වා ගැනීම සඳහා , පද්ධතියට එක්කළ යුතු තනි බලයේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

(b). සමාන දිගින් හා, බර පිළිවෙලින් W හා $w(W > w)$ වූ AB හා BC ඒකාකාර දඬු දෙකක් B හි දී නිදහස් ලෙස සන්ධි කර ඇත. $A\hat{B}C = \frac{\pi}{2}$ වන සේ හා රළු තිරස් පොළොවක් මත A හා C දෙකෙළවර පිහිටින සේ , දඬු සිරස් තලයක සමතුලිතතාවේ පවතී. μ යනු දඬු හා පොළොව අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය නම්, සමතුලිතතාව ආරාක්ෂා කර ගැනීම සඳහා μ ට තිබිය හැකි අඩුතම අගය $\frac{W+w}{W+3w}$ බව පෙන්වන්න.
$\mu = \frac{W+w}{W+3w}$ නම්, ලිස්සීම A හි දී නොව C හිදී සිදුවීමට ආසන්න බව සාධනය කරන්න.

06)(a). එක එකක දිග $2a$ වූ AB,BC,CD, හා DE ඒකාකාර දඬු හතරක් B,C හා D හි දී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. AB හා DE දඬු එක එකක බර 2W ද BC හා CD දඬු එක එකක බර W ද වේ . එකම තිරස් මට්ටමක පිහිටි A හා E ලක්ෂ්‍ය වලින් දඬු සිරස් තලයක එල්ලා ඇති අතර AB හා BC දඬු සිරස සමඟ පිළිවෙලින් α හා β කෝණ සාදන සේ පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ පවතී. $\tan\beta = 4\tan\alpha$ බව පෙන්වන්න.

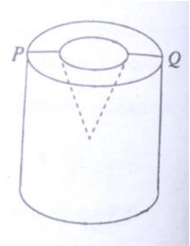
(b). සමාන දිගින් යුත් AB, BC, CD, DE, EA, EB හා BD සැහැල්ලු දඬු හතක් , රූපයේ දැක්වෙන පරිදි රාමුකට්ටුවක් සෑදෙන ආකාරයට , ඒවායේ කෙළවරවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. රාමු කට්ටුව C හි දී සුමට ලෙස අසවු කර ඇති අතර A හි දී නිවටන් $10\sqrt{3}$ ක බරක් දරයි. E හිදී P තිරස් බලයක් මඟින්, AC තිරස් වන ලෙස රාමු කට්ටුව සිරස් තලයක තබා ඇත.



i. E හි P බලයේ විශාලත්වය අගයන්න.
ii. C හි ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.
iii. බෝ අංකනය යෙදීමෙන් , ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක් ඇඳ , ආතති හා තෙරපුම් වෙන්කොට දක්වමින් දඬු සියල්ලෙහිම ප්‍රත්‍යාබල සොයන්න.

07). උස h වූ ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය, එහි අක්ෂය මත , ආධාරකයේ සිට $\frac{1}{4}h$ දුරකින් පිහිටින බව පෙන්වන්න.

ආධාරකයේ අරය r හා උස h වූ ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවක් සඳහා අච්චුවක්, අරය $R(>r)$ හා උස H(>h) වූ ඒකාකාර ඍජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරාකාර කොටසක් තුළ කේතු කුහරයක් තැනීමෙන්, නිපදවා ඇත. කේතු කුහරයේ සමමිතික අක්ෂය සිලින්ඩරාකාර කොටසේ සමමිතික අක්ෂය සමඟ සමපාත වේ.



තනාගන්නා ලද අච්චුව රූපයේ පෙන්වා ඇති අයුරින් වේ. PQ විෂ්කම්භයේ සිට අච්චුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට ඇති දුර සොයන්න.

$R = 2r$ හා , අච්චුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය කේතු කුහරයේ ශීර්ෂයේ පිහිටයි නම්, $h = 2\left(4 - \sqrt{14}\right)H$ බව අපෝහනය කරන්න.

$R = 2r$ වනසේ අච්චුවක් P ලක්ෂ්‍යයෙන් එල්ලා තබා ඇති අතර එය නිදහස් ලෙස සමතුලිතතාවේ එල්ලෙමින් ඇත. තවද , $H = 3r$ නම් , යටිඅත් සිරස සමඟ PQ හි ආනතිය සොයන්න.

08). A හා B යනු ඕනෑම සිද්ධි දෙකක් යයි ගනිමු. A' හා B' යනු පිළිවෙලින් A හා B හි අනුපූරක සිද්ධි යයි ගනිමු. $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$ බව සාධනය කරන්න.
ඒ නයින්, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ බව පෙන්වන්න.
A හා B යනු ස්වායත්ත සිද්ධි නම්,

i. A හා B'
ii. A' හා B'

ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න.

ජාත්‍යාන්තර එක් දින තරඟාවලියකට පෙර ලංකා කණ්ඩායමේ X නම් නිත්‍ය පිතිකරුවා හෝ Y නම් නිත්‍ය පන්දු යවන්නා ආබාධයකට ලක් වීමට ඉඩ ඇති බව අතීත තොරතුරු වලින් හෙළිදරව් වේ. X එවැනි අබාධයකට ලක්වීමේ සම්භාවිතාව 0.2 ක් වන අතර, එය Y සඳහා 0.1 ක් වේ. අබාධවලට ලක්වීම එකිනෙකින් ස්වායත්ත ලෙස සිදුවේ. N, A, B හා AB සිදිධි පහත දැක්වෙන ආකාරයට අර්ථ දක්වා ඇත.

N: X හෝ Y යන දෙදෙනාගෙන් කිසිවෙකු ආබාධයකට ලක් නොවීම.
A: X පමණක් ආබාධයකට ලක් වීම
B: Y පමණක් ආබාධයකට ලක් වීම
AB: X සහ Y දෙදෙනාම ආබාධයට ලක් වීම.

$P(N) = 0.72, P(A) = 0.18, P(B) = 0.08$ හා $P(AB) = 0.02$
බව පෙන්වන්න.

දෙන ලද N, A, B හෝ AB සිද්ධියක් සඳහා ලංකා කණ්ඩායම තරඟාවලිය ජය ගැනීමේ , පරාජය වීමේ හෝ ජයපරාජයෙන් තොරව අවසන් වීමේ අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතා වගුවේ පෙන්වා ඇත; මෙහි (U,V) කෝෂයෙහි U දී ඇති විට V හි අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව වන $P(V|U)$ නිරූපණය කරයි.

i. සුදුසු රුක් සටහනක් ඇඳීමෙන් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් හෝ ලංකා කණ්ඩායමේ ළඟ එන තරඟාවලිය ජයගැනීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

ii. ලංකා කණ්ඩායම තරඟාවලිය පරාජය වී ඇති බව දී ඇති විට , එම තරඟාවලියට පෙර Y ආබාධයකට ලක්ව තිබීමේ අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව සොයන්න.

සිද්ධිය (U)	තරඟාවලියක ප්‍රතිඵලය (V)		
	ජයගැනීම	පරාජයවීම	ජය පරාජයෙන් තොරවීම
N	0.9	0.08	0.02
A	0.5	0.4	0.1
B	0.7	0.2	0.1
AB	0.3	0.6	0.1

09)(a). $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ යනු එක්තරා අධ්‍යනයකින් ලබාගන්නා ලද නිරීක්ෂණ n වල කුලකයක් යැයි ගනිමු.
මෙම දත්ත කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව අර්ථ දක්වන්න.
එක්තරා පෙති වර්ගයක ඇති ක්‍රියාකාරී ද්‍රව්‍ය කොටස් ප්‍රමාණය 52mg හා 67mg අතර වේ යයි සැලකේ. අඩංගු ක්‍රියාකාරී ද්‍රව්‍ය කොටස් ප්‍රමාණය සඳහා පරීක්ෂා කරන ලද පෙති 40 කින් යුත් සසම්භාවී නියැදියක මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව පිළිවෙලින් 58mg හා 3.2 mg² වේ. දත්ත නැවත පරීක්ෂා කර බැලීමේදී 63 mg හා 55mg අගය දෙක සාවද්‍යව 65mg හා 53mg ලෙස ගෙන ඇති බව සොයා ගන්නා ලදී.

i. මෙම වරද නිසා මධ්‍යන්‍යයට බලපෑමක් නොමැති බව ,

ii. නිවැරදි කිරීම නිසා විචලතාව අඩුවන බව

පෙන්වන්න.

(b). එක්තරා නගරයකදී, කැලණි ගඟ හරහා මඟින් ප්‍රවාහනය කිරීමේ බලාපොරොත්තුවෙන් , ආසන්න ලෙස 1500kg ක උපරිම භාරබරක් සහිත පාලම් පාරුවක් නිර්මාණය කෙරෙයි. මම බර සීමාව ඉකමවා යෑම ආරක්ෂාකාරී නොවන බැවින්, ප්‍රදේශයේ පළාත් පාලන අධිකාරියට , මෙම පාරු සේවය ප්‍රයෝජනයට ගැනීමට බලාපොරොත්තුවන මගීන්ගේ බරෙහි ව්‍යාප්තිය සොයාගැනීමට සමීක්ෂණයක් පැවැත්වීමට වුවමනා වේ. මෙම මගී සංගහනයෙන්, මගීන් 200 කින් යුත් සසම්භාවී නියැදියක් ගන්නා ලදි මෙම මගීන් 200 දෙනාගේ බර සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ දී ඇත.

i. බරෙහි ව්‍යාප්තිය මධ්‍යන්‍යය , මධ්‍යස්ථය හා මාතය සොයන්න. මාතය සොයන්න.

වරකට ආරාක්ෂිතව ප්‍රවාහනය කළ හැකි උපරිම මගීන ගණන ඇසුරෙන් , පාරුවෙහි බර සීමාව ප්‍රකාශ කරීමට පළාත් පාලන අධිකාරිය බලාපොරොත්තු වේ. ඉහත තොරතුරු පදනම් කර ගෙන වරකට ආරක්ෂිතව ප්‍රවාහනය කළ හැකි උපරිම මගීන් ගණන සොයන්න.

ii. ව්‍යාප්තියේ සම්මත අපගමනය හා කුටිකතා සංගුණකය සොයා, ව්‍යාප්තිය හැඩය ලබාගන්න.

පන්ති ප්‍රාන්තරය (බර kg වලින්)	සංඛ්‍යාතය
0-10	10
10-20	27
20-30	33
30-40	35
40-50	38
50-60	30
60-70	19
70-80	8