ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර(උසස් පෙළ),2010 අගෝස්තු

සංයුක්ත ගණිතය I | පැය තුනයි.

01)(a). α සහ β යනු $f(x) = x^2 + px + q = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල වේ. මෙහි p හා q තාත්වික වන අතර $2p^2 + q \neq 0$ වේ. $y(p - x) = p + x$ නම්, x සඳහා $f(x) = 0$ හි ආදේශ කිරීමෙන් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, $g(y) \equiv (2p^2 + q)y^2 + 2(q - p^2)y + q = 0$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $y \neq -1$ වේ.

ඒ නයින්, $g(y) = 0$ සමීකරණයේ මූල α හා β ඇසුරෙන් සොයන්න.
p හා q ඇසුරෙන් $\left(\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2\alpha+\beta}\right)^2$ ප්‍රකාශ කරන්න.

(b). a,b,c හා m යනු $a + b + c = 0$ හා $ab + bc + ca + 3m = 0$ වන ආකාරයේ නියත නම්,
$(y + ax)(y + bx)(y + cx) = y(y^2 - 3mx^2) + abcx^3$ බව සාධනය කරන්න.
$y = x^2 + m$ නම්,
$(x^2 + ax + m)(x^2 + bx + m)(x^2 + cx + m) = x^6 + abcx^3 + m^3$ බව පෙන්වන්න.
$g(x) = x^6 + 16x^3 + 64$ ට $(x^2 - 2x + m), (x^2 + ax + m)$හා$(x^2 + bx + m)$ යන සාධක තිබේ නම්, m ,a හා b හි අගයන් සොයන්න.
ඒ නයින්,

I. සියලු x සඳහා $g(x)$සෘණ නොවන බව පෙන්වන්න.
II. g(x) = 0 සමීකරණයේ මූල සොයන්න.

02)(a). 1,2,4,5,6,8 හා 9 සංඛ්‍යා හතෙන් ඕනෑම සංඛ්‍යාවක් ,

I. පුනරාවර්තන සහිතව ,
II. පුනරාවර්තන රහිතව ,

තෝරා ගෙන, සංඛ්‍යා හතරේ වෙනස් සංඛ්‍යා කොපමණ ගණනක් සෑදිය හැකිදැයි සොයන්න.

(I) අවස්ථාවේදී , සංඛ්‍යා හතරේ සංඛ්‍යා කොපමණ ගණනක, ඕනෑම සංඛ්‍යාවක් වාර දෙකකට වඩා වැඩියෙන් නොතිබේ දැයි සොයන්න.

(II) අවස්ථාවේදී සංඛ්‍යාක හතරේ සංඛ්‍යා කොපමණ ගණනක් ඔත්තේ සංඛ්‍යා දෙකක් හා ඉරට්ටේ සංඛ්‍යා දැකක් තිබේ දැයි සොයන්න.
ඒවායෙන් කොපමණ ගණනක් ඉරට්ටේ වේ දැයි සොයන්න.

(b). සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්,
$(1+x)^n = c_0 + c_1x + \cdots + c_rx^r + \cdots + c_nx^n$ යයි ගනිමු . $(1+x)^{n-1}$ හා (1+x) හි ගුණිතය සැළකීමෙන් $r = 1,2\ldots,n-1$ සඳහා ${}^nc_r = {}^{n-1}c_{r-1} + {}^{n-1}c_r$ බව පෙන්වන්න.
$c_0 - c_1 + c_2 - \cdots + (-1)^{n-1}c_{n-1} + (-1)^n c_n$ බව අපෝහනය කරන්න.
වෙනත් අයුරකින් ඉහළ ප්‍රතිඵලය සත්‍යාපනය කරන්න.
n යනු ඉරට්ටේ නිඛිලයක් නම් $c_0 + c_2 + c_4 + \cdots + c_n = 2^{n-1}$ බව අපෝහනය කරන්න.

03). ඕනෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා , ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මඟින් $4n^3 - 6n^2 + 4n - 1 = n^4 - (n-1)^4$ බව සාධනය කරන්න.
ඒ නයින්, $r = 1,2,\ldots$ සඳහා $u_r - u_{r-1} = 4r^3 - 6r^2 + 4r - 1$ වන ආකාරයට u_r ලියා දක්වන්න.
$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ බව අපෝහනය කරන්න.
{ ඔබට $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ බව උපකල්පනය කළ හැක.}

$1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \ldots.$ ශ්‍රේණියේ r වෙනි පදය v_r ලියා දක්වන්න.
$\sum_{r=1}^{n} v_r = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$ බව පෙන්වන්න.
මෙම ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

$\frac{3}{1^2} + \frac{5}{1^2+2^2} + \frac{7}{1^2+2^2+3^2} + \ldots$ ශ්‍රේණියේ r වන පදය w_r යැයි ගනිමු.
$w_r = f(r) - f(r+1)$ වන ආකාරයට $f(r)$ සොයන්න.
ඒ නයින්, $s_n = \sum_{r=1}^{n} w_r$ සොයන්න.
මෙම ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

04)(a). $|Z - a| = |Z + a|$ සපුරාලනු ලබන Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ පථය නිර්ණය කරන්න. මෙහි a යනු ශූන්‍ය නොවන තාත්වික සංඛ්‍යාවකි.

(b). Z_1 හා $Z_2(\neq 0)$ යනු $|Z_1 - 2Z_2| = |Z_1 + 2Z_2|$ වන ආකාරයේ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් යැයි ගනිමු.

(a) කොටසා උපයෝගි කරගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ $\frac{iZ_1}{Z_2} = k$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි k තාත්වික වේ.

I. $|\arg(Z_1) - \arg(Z_2)| = \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.

II. ආර්ගන්ඩ් සටහනේ p_1 හා p_2 ලක්ෂ්‍ය දෙක පිළිවෙලින් $Z_1 + 2Z_2$ හා $Z_1 - 2Z_2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි.

OP_1 රේඛාවට OP_2 රේඛාවට ලම්බ නොවේ නම්, $P_1OP_2 = tan^{-1}\left(\frac{4|k|}{k^2-4}\right)$ බව පෙන්වන්න. මෙහි O යනු ආර්ගන්ඩ් තලයේ මූල ලක්ෂ්‍ය වේ.

OP_1 රේඛාවට OP_2 රේඛාවට ලම්බ වේ නම්, k හි විය හැකි අගය දෙක නිර්ණය කරන්න.

05)(a). $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x+x\sin 3x}{x^2}$ අගයන්න.

(b).

I. $y = tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ හා $z = tan^{-1}x$ යැයි ගනිමු. $\frac{dy}{dz}$ සොයන්න.

II. $y = e^{m\,sin^{-1}x}$ යැයි ගනිමු. මෙහි m යනු නියතයකි.

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - m^2y = 0$$ බව පෙන්වන්න.

$x = 0$ හි දී, $\frac{d^3y}{dx^3}$ හි අගය සොයන්න.

(c). දෙන ලද l දිගකින් යුක්ත කම්බියක් කොටස් දෙකකට කපා ඇත. එක කොටසක් වෘත්තයක හැඩයකට නවා ඇති අතර අනෙත් කොටස සමචතුරස්‍රයක හැඩයට නවා ඇත. වෘත්තයේ හා සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලවල ඓක්‍යය වන $A(x)$ යන්න $A(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(1-x)^2}{16}$ වර්ග ඒකක , මඟින් දැනු ලබන බව පෙන්වන්න. මෙහි $x, (0 \le x \le l)$ යනු වෘත්තයේ හැඩයට නවා ඇති කම්බි කොටසේ දිග වේ. ඒ නයින්, සමචතුරස්‍රයේ පාදයක්, වෘත්තයේ විෂ්කම්භයට සමාන වන විට, $A(x)$ ව.එ අවම වන බව පෙන්වන්න.

06)(a). භින්න භාගසොයන්න කර ගනිමින් $\int \frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2}dx$ සොයන්න.

(b). $I = \int e^{ax}cosbx\,dx$ හා $J = \int e^{ax}\,sinbx\,dx$ යැයි ගනිමු; මෙහි a හා b යනු ශුන්‍ය නොවන තාත්වික සංඛ්‍යා වේ.

i. $bI + aJ = e^{ax}\sin bx$

ii. $aI - bJ = e^{ax}cosbx$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, I හා J සොයන්න.

(c). $x^3t + 1 = 0$ ආදේශය උපයෝගී කර ගනිමින් හෝ වෙනත් අයුරකින් හෝ , $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(x^3-1)} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{9}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

07) . (a). $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ සහ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ සරළ රේඛා අතර කෝණසමච්ඡේධකවල සමීකරණ $\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$ බව පෙන්වන්න.

(b). (x_0,y_0) ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන සරල රේඛාවක සමීකරණය $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = t$ ලෙස පරාමිතික ආකාරයෙන් දී ඇත . මෙහි $a^2 + b^2 = 1$ හා t පරාමිතික වේ .$|t|$ යනු (x_0,y_0) ලක්ෂ්‍යයේ සිට (x,y) ලක්ෂ්‍යයට රේඛාව දිගේ මනින ලබන දිග බව පෙන්වන්න.

(c). ABCD රොම්බසය පූර්ණ ලෙස පළමු පාදකය තුළ පිහිටයි. AB හා AD හි සමීකරණ පිළිවෙලින් $x - 2y + 5 = 0$ හා $2x - y + 1 = 0$ වේ. BAD කෝණය සුළු කෝණයක් වන අතර $AC = 2\sqrt{2}$ වේ.(a) හා (b) කොටස් උපයෝගි කර ගනිමින් හෝ වෙනත් අයුරකින් හෝ AC හි හා රොම්බසයෙහි අනෙත් පාද දෙකෙහි සමීකරණ සොයන්න. E යනු රොම්බසයේ විකර්ණ වල ඡේධන ලක්ෂ්‍යය නම් DE හි දිග සොයා , එනයින් රොම්බසයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

08) $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$ හා $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$ වෘත්ත දෙක අභ්‍යන්තරව හෝ භාහිරව එකිනෙකට ස්පර්ශවීමට අවශ්‍යතාව දෙන්න.
$S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy + c = 0$ යනු වෘත්තයක් යැයිද , $P_1(x_1,y_1)$ යනු $S = 0$ වෘත්තයෙන් පිටත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු. P_1 ලක්ෂ්‍යයේ සිට $S = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$ මඟින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.
$S_1 \equiv x^2+y^2+4x-2y-5 = 0$ හා $S_2 \equiv x^2+y^2-8x-6y+15 = 0$ වෘත්ත දෙක බාහිරව එකිනෙක ස්පර්ශ වන බව පෙන්වන්න.
$S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ වෘත්ත දෙකෙහි ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයවන A හි ඛන්ඩාංක සොයන්න.
P යනු, P ලක්ෂ්‍යයේ සිට $S_1 = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග , k වරක් P ලක්ෂ්‍යයේ සිට $S_2 = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිගට සමාන වන ආකාරයට පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු.
P ලක්ෂ්‍යයේ පථය,

I. $k = 1$නම්, $S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ වෘත්ත දෙකෙහි කේන්ද්‍ර යා කරන රේඛාවට ලම්භව A හරහා යන සරල රේඛාවක් බව,

II. $k \neq 1$ නම් , A හරහා යන වෘත්තයක් බව සාධනය කරන්න.

$k = \frac{1}{2}$ විට P හි පථයේ සමීකරණය ලියා දක්වා එය A දී $S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ වෘත්ත දෙකෙන් එකක් බාහිර ලෙසද ,අනෙක අභ්‍යන්තර ලෙසද ස්පර්ශකරන බව පෙන්වන්න.

09)(a). ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන් කොසයින් නීතිය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්,

i. $2\left(\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}\right) = \frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$ බව.

ii. $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ නම් එවිට C කෝණය $\frac{\pi}{3}$ බව, පෙන්වන්න.

(b). $\sqrt{3}\,cos\theta + sin\theta$ යන්න $R\cos(\theta - \alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි R හා α තාත්වික වේ.

ඒ නයින්, $\sqrt{3}cos^2\theta + (1-\sqrt{3})sin\theta\, cos\theta - sin^2\theta - cos\theta + sin\theta = 0$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(c). $-1 \le x \le 1$ සඳහා $cos^{-1}(-x) = \pi - cos^{-1}x$ බව පෙන්වන්න.