ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර(උසස් පෙළ),2008 අගෝස්තු

සංයුක්ත ගණිතය I | පැය තුනයි.

01)(a). α හා β යනු $x^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල වේ; මෙහි $c \neq 0$ වේ. α^4 හා β^4 මූල වන වර්ග සමීකරණය b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න.
ඒ නයින්, $\frac{\alpha^4}{\beta^4} + 1$ හා $\frac{\beta^4}{\alpha^4} + 1$ මූල වන වර්ග සමීකරණය,b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න.

(b). $f(x)$ බහුපදය $(x - \alpha)$ වලින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $f(\alpha)$ බව පෙන්වන්න.
$f(x)$ බහුපදය $(x - \alpha)(x - \beta)$ වලින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $Ax + B$ ආකාරය ගනියි; මෙහි $\alpha \neq \beta$ වේ. $\alpha, \beta, f(\alpha)$ සහ $f(\beta)$ ඇසුරෙන් A හා B නියත ප්‍රකාශ කරන්න.
ඒ නයින්, $x^3 + kx^2 + k$ යන්න $(x - 1)(x + 2)$ න් බෙදූ විට ශේෂයේ නියත පදය අඩංගු නොවන ලෙස k නියතයේ අගය සොයන්න.

02)(a). ගැහැණු ළමයින් 7 දෙනෙකු සහ පිරිමි ළමයින් 8 දෙනෙකු අතුරෙන් විවාද කණ්ඩායමක් සෑදීම සඳහා සිසුන් 5 දෙනෙකු තෝරා ගැනීමට අවශ්‍යයව ඇත.

i. කණ්ඩායම ගැහැණු ළමයින් දෙදෙනෙකුගෙන් හා පිරිමි ළමයින් තිදෙනෙකුගෙන් සමන්විත විය යුතු නම්,
ii. කණ්ඩායමේ වැඩි තරමින් පිරිමි ළමයි තිදෙනෙකුගෙන් සමන්විත විය යුතු නම්,
iii. එක්තරා පිරිමි ළමයෙකු හා එක්තරා ගැහැණු ළමයෙකු එකම කණ්ඩායමට තෝරාගත නහැකි නම්,

තෝරා ගත හැකි කණ්ඩායම් ගණන සොයන්න.

(b). $(1 + x)^n$ ප්‍රසාරණයෙහි අනුගාමී සංගුණක තුනක් 45,120 සහ 210 වේ; මෙහි n ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි. එහි අගය සොයන්න.

(c). $(1 + x)^n$ ප්‍රසාරණයෙහි අනුගාමී සංගුණක තුනක් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පිහිටිය හැකිද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

03)(a). ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය උපයෝගී කර ගනිමින්, ධන නිඛිලමය n සඳහා $5^{n+1} - 2^{n+1} - 3^{n+1}$ යන්න 6 න් බෙදෙන බව පෙන්වන්න.

(b). (i) $\sum_{r=1}^{n} {}^{n}c_{r}$ සොයා, ධන නිඛිලමය n සඳහා $\frac{2^n}{n} > \frac{(n-1)}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(ii) අපරිමිත ශ්‍රේණියක r වැනි පදය u_r යන්න $\frac{2^{r-1}r}{(r+1)(r+2)}$ මඟින් දෙනු ලැබේ.

$u_r = f(r) - f(r-1)$ වන පරිදි $f(r)$ සොයන්න.

ඒ නයින්, $\sum_{r=1}^{n} u_r = s_n$ සොයන්න.

$\mathbb{R}$ තුළ $\lim_{n\to\infty} s_n$ පවතී ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

04). $Z^3 - 1$ සාධක වලට බෙදීමෙන් $Z^3 - 1 = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.
ඉහත සමීකරණයේ එක් සංකීර්ණ මූලයක් ω නම්, අනෙක ω^2 බව පෙන්වන්න.
r = 1,2,3 සඳහා $Re\left(\frac{1}{1+\omega^r}\right) = \frac{1}{2}$ බව පෙන්වා, ප්‍රතිඵල ජ්‍යාමිතිකව විවරණය කරන්න.

Z_1 Z_2 සහ Z_3 යනු ${Z_1}^2 + {Z_2}^2 + {Z_3}^2 - Z_1Z_2 - Z_2Z_3 - Z_3Z_1$ සම්බන්ධය තෘප්තකරන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා තුනකි.
Z_1 යන්න $Z_1 = -\omega Z_2 - \omega^2 Z_3$ හෝ $Z_1 = -\omega^2 Z_2 - \omega Z_3$ ලෙස ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න.

Z_1 Z_2 සහ Z_3 යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා තුන සමපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ නිරූපණය කරන බව අපෝහනය කරන්න.

05)(a). ප්‍රමූලධර්ම භාවිතයෙන් $f(x) = \tan x$ ශ්‍රිතයෙහි x විෂයෙන් ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න.
$0 < x < 1$ විට $\tan(sin^{-1}x)$, x විෂයෙන් අවකලනය කරන්න.

(b). y යනු u හි අවකල්‍ය ශ්‍රිතයක් සහ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ විට $u = \ln cosx$ නම්,

$sin^3x \frac{d^2y}{du^2} = sinx\ cos^2x \frac{d^2y}{dx^2} - cosx \frac{dy}{dx}$ බව පෙන්වන්න.

(c). C යනු $x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$ සහ $y = a\left(t - \frac{1}{t}\right)$ මඟින් පරාමිතිකව දෙනු ලවන වක්‍රය යැයි ගනිමු. මෙහි a යනු නිශ්ශුන්‍ය නියතයක්ද t යනු නිශ්ශුන්‍ය පරාමිතියක්ද වේ. C වක්‍රයට t_0 පරාමිතික අගය ඇති ලක්ෂ්‍යයෙහි දී වූ අභිලම්බයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

$(-13a, 0)$ ලක්ෂ්‍යයෙ සිට C වක්‍රයට අභිලම්බ හතරක් ඇඳිය හැකි බව පෙන්වා. අභිලම්බ හතරේ අඩියෙහි පරාමිතික අගයන් සොයන්න.

06)(a). භින්න භාග උපයෝගී කර ගනිමින්, $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2}$ සොයන්න; මෙහි $a \neq 0$ වේ.

(b). (i). $\frac{d}{dx}\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right) = 2^x$ බව පෙන්වන්න.

(ii). $\int 2^x dx$ සොයන්න.

(iii). කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int_{-1}^{1} 2^{\sqrt{x+1}} dx$ අගයන්න.

07).(අ) $y = m_1x + c_1$ හා $y = m_2x + c_2$ මඟින් දෙනු ලබන සරළ රේඛා අතර කෝණ සමච්ඡේධක වන l_1 හා l_2 හි සමීකරණ ලබා ගන්න. මෙහි $m_1 \neq m_2$ වේ. එනයින් l_1 හා l_2 ලම්භ බව සත්‍යාපණය කරන්න.

(ඇ) ABC යනු x අක්ෂයේ ධන දිශාව ඔස්සේ BC ආධාරකය චලනය වන පරිදි ද, AB = AC ද, A ශීර්ෂය x අක්ෂයට ඉහලින්ද වූ ත්‍රිකෝණයක් යැයි ගනිමු. ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය වර්ග ඒකක 9 ක්ද , BC පාදයේ දිග ඒකක 6ක්ද වේ, $B \equiv (b,0)$ යැයි ද ගනිමු.

I. AB හා AC පාදවල සමීකරණ සොයන්න.

II. ඉහත (අ) හි ලබාගත් කෝණ සමච්ඡේධක වල සමීකරණ භාවිතයෙන් ABC ත්‍රිකෝණයේ B හා C කෝණවල අභ්‍යන්තර සමච්ඡේධක වල සමීකරණ සොයන්න.

එනයින් , $\left(\frac{\pi}{8}\right)$ හි අගය සොයන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයේ කෝණවල අභ්‍යන්තර සමච්ඡේධක තුන එක් ලක්ෂ්‍යයකදී හමුවන බව පෙන්වා එම ලක්ෂ්‍යයේ පථය නීර්ණය කරන්න.

08)(a) $S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy + c = 0$ හා $S' \equiv x^2+y^2+2g'x+2f'y+c' = 0$ යැයි ගනිමු. $S = 0$ යනු අචල ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන විචල්‍යය වෘත්තයක් ද , $S' = 0$ යනු අචල වෘත්තයකද වේ. $S = 0$ වෘත්තය ,$S' = 0$ වෘත්තය විශ්කම්භය ප්‍රතිවිරුද්ධ අන්තවලදී කපයි. $S = 0$ හි කේන්ද්‍රය අචල සරල රේඛාවක් මත පිහිටින බව පෙන්වන්න.

(b) A සහ B යනු පිළිවෙලින් (x_1,y_1) හා (x_2,y_2) යන ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍යය දෙක වේ.AB විශ්කම්භය ලෙස ඇති වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න .

CD යනු AB ට ලම්බ විශ්කම්භය වේ. C හා D හි ඛණ්ඩාංක $\left[\frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \lambda, \frac{1}{2}(y_1 + y_2) + \mu\right]$ සහ $\left[\frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \lambda, \frac{1}{2}(y_1 + y_2) - \mu\right]$ ආකාරය ගන්නා බව පෙන්වන්න. මෙහි λ, μ නිර්ණය කළ යුතු වේ.

09)(a). සයින් නීතිය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

P යනු $PAB = PBC = PCA = \emptyset$ වන අයුරින් ABC ත්‍රිකෝණයක් ඇතුළත වූ ලක්ෂ්‍යයකි. සුපුරුදු අංකනයෙන් ,
$\frac{bc}{a}(cot\emptyset - cotA) = \frac{ac}{b}(cot\emptyset - cotB) = \frac{ab}{c}(cot\emptyset - cotC)$ බව සාධනය කරන්න.

(b). x,y හා z යනු $x + y + z = \pi$, $cosx + cosy = 1$ සහ $t = sinx + siny$ වන පරිදි ඍණ නොවන තාත්වික සංඛ්‍යා තුනක් යැයි ගනිමු.

i. $tan^{-1}(t) = \frac{x+y}{2}$
ii. $o \leq t \leq \sqrt{3}$

බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින්. t එහි උපරිම අගය ගන්නා විට x,y හා z හි අගයන් සොයන්න.