ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව	
අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර(උසස් පෙළ),2005 අප්‍රේල්	
සංයුක්ත ගණිතය I	පැය තුනයි

01)(a). $f(x) = x^2 + bx + c$ හා $g(x) = x^2 + qx + r$ යයි ගනිමු. මෙහි $b, c, q, r \in \mathbb{R}$ හා $c \neq r$ වේ. α, β යනු $g(x) = 0$ හි මූල යැයි ගනිමු.
$f(\alpha)f(\beta) = (c - r)^2 - (b - q)(cq - br)$ බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, $f(x) = 0$ ට හා $g(x) = 0$ ට පොදු මූලයක් ඇත්නම්. එවිට $b - q, c - r$ හා $cq - br$ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පිහිටින බව සාධනය කරන්න.
α, γ යනු $f(x) = 0$ හි මූල නම්, β, γ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය
$x^2 - \frac{(c+r)(q-b)}{(c-r)}x + \frac{cr(q-b)^2}{(c-r)^2} = 0$ බව පෙන්වන්න.

(b). $p(x) = ax^3 + bx + c$ යන්න $x + 1$ න් $x - 1$ න් හා $x - 2$ න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂ පිළිවෙළින් 4,0 හා 4 වේ. a,b,c හි අගයන් සොයා, $p(x)$ හි ඒකජ සාධක සියල්ල සොයන්න.

02)(a). පිරිමි ළමයින් හතකින් හා ගැහැණු ළමුන් පහකින් යුත් සමූහයකින් පස් දෙනෙකුගෙන් සමන්විත විවාද කණ්ඩායමක් තෝරාගත යුතුව ඇත.

i. සමූහයේ ඕනෑම 5 දෙනෙකු,
ii. යටත් පිරිසෙන් එක් ගැහැණු ළමයෙකු,
iii. යටත් පිරිසයින් එක් ගැහැණු ළමයෙකු හා එක් පිරිමි ළමයෙකු ,

අඩංගු වන සේ මෙම කණ්ඩායම අකාර කොපමණ ගණනකට සකස් කළ හැකි වේද?

(b). $(1 + 2x + kx^2)^5$ හි ප්‍රසාරණයේ x^3 හි සංගුණකය k ඇසුරෙන් සොයන්න. මෙම සංගුණකය ශුන්‍ය වේ නම් k හි අගය සොයන්න.
k හි මෙම අගය සඳහා $(1 + 2x + kx^2)^5$ හි ප්‍රසාරණයේ x^n හි සංගුණකය a_n මඟින් අංකනය කෙරේ නම්

i. $a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = -121$ බවත්,
ii. $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 122$ බවත් පෙන්වන්න.

03)(a). ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය යොදා ගනිමින්, සෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහාම,

$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}$ බව සාධනය කරන්න.
$\frac{1}{4}-\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(r+1)(r+2)}<\frac{1}{100}$ වන කුඩාතම n නිඛිලය සොයන්න.
(b). $\frac{1}{2}|x-1|>|x-4|$ වන x හි තාත්වික අගය කුලකය සොයන්න.

04)(a). Z_1 හා Z_2 යනු ඕනෑම සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් යැයි ගනිමු. ආගන්ඩ් සටහනේ Z_1+Z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය නිර්මාණය කරන්න.

$|Z_1+Z_2|=|Z_1|+|Z_2|$ වන අවස්ථාව විදහා දැක්වෙන රූප සටහනක් අඳින්න. සාධාරණ වශයෙන් $|Z_1+Z_2|\le|Z_1|+|Z_2|$ වන්නේ ඇයි දැයි ජ්‍යාමිතිකව පැහැදිළි කරන්න.

$Z_1=-12+5i$ හා $|Z_2|=5$ නම් $|Z_1+Z_2|$ හි වැඩිතම අගය සොයන්න.
$|Z_1+Z_2|$ ට ස්වකීය වැඩිතම අගය ඇත්නම් හා $\frac{\pi}{2}<\arg Z_2<\pi$ නම්, $p+iq$ ආකාරයෙන් Z_2 ප්‍රකාශ කරන්න.

(b). ආගන්ඩ් සටහනෙහි A,B,C හා D ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් Z_1 , Z_2, Z_3 හා Z_4 සකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි.
AB හා CD ලම්බව ඡේදනය වේ නම් එවිට $\frac{Z_1-Z_2}{Z_3-Z_4}$ හුදෙක් තාත්වික බව පෙන්වන්න.

05)(a). $y=\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2$ නම් $\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-1=0$ බව පෙන්වන්න.

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}$ හා $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_{x=0}$ සොයන්න.

(b). සමචතුරස්‍ර පතුළක් සහිත එහෙත් පියනක් රහිත, ධාරිතාව $256cm^3$ කින් යුත් සෘජුකෝණාස්‍ර පෙට්ටියක් සෑදිය යුතුව ඇත. පතුළ සඳහා අවශ්‍ය ද්‍රව්‍යවල වර්ගසෙන්ටිමීටරයකට මෙන් 8 ගුණයක් සෘජුකෝණාස්‍ර පැති සඳහා අවශ්‍ය ද්‍රව්‍යවල වර්ගසෙන්ටිමීටරයකට වැය වේ. වඩාත්ම ලාභදායි පෙට්ටියේ මාන සොයන්න.

06)(a). $\tan\frac{x}{2}=t$ ආදේශය යොදා ගැනීමෙන්, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{5+4\sin x}$ අනුකලය අගයන්න.

(b). කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යොදා ගැනීමෙන් $\int_0^1 15x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$ අනුකලය අගයන්න.

(c). $\int \frac{x^2-10x+13}{(x-2)(x^2-5x+6)}dx$ සොයන්න.

07). ABC ත්‍රිකෝණයේ B හා C ශීර්ෂ පිළිවෙලින් 4x – 3y = 0 රේඛාව මත හා x අක්ෂය මත පිහිටයි. BC පාදය , $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ හරහා යන අතර එයට m බෑවුමක් ඇත.

I. m ඇසුරෙන් B හා C හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

II. OB = $\left|\frac{10(m-1)}{3(3m-4)}\right|$ බවත් OC = $\left|\frac{2(m-1)}{3m}\right|$ බවත් පෙන්වන්න. මෙහි O මූල ලක්ෂ්‍යය වේ.

III. AOBC රොම්බසයක් නම් m ට තිබිය හැකි අගය දෙක හා A හි අනුරූප ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

08). $x^2+y^2+2gx+2fy = 0$ හා $x^2+y^2-4r^2 = 0$ සමීකරණ සහිත වෘත්ත දෙක එකිනෙකට හාහිර ලෙස කිසිසේත්ම ස්පර්ශ නොවන නමුත් $g^2+f^2 = r^2$ නම් අභ්‍යන්තර ලෙස එකිනෙකට ස්පර්ශ වන බව පෙන්වන්න. පසුව සඳහන් කළ අවස්තාවේදී ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ ඛන්ඩාංක සොයන්න.

මූල ලක්ෂ්‍යයත් , $0< a < 1$ වන (a,0) ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන්නාවූද , $x^2+y^2-4 = 0$ යන වෘත්තය ස්පර්ශ කරන්නා වූද වෘත්ත දෙකක් ඇති බව පෙන්වන්න.
ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය වල ඛණ්ඩාංක සොයන්න.
මෙම ලක්ෂ්‍යය , විශ්කම්භයක අන්ත ලෙස ඇති වෘත්තයේ සමීකරණයද සොයන්න.

09)(a)(i). සෑම θ සඳහා ම $8\,cos^4\theta - 4cos^3\theta - 8\,cos^2\theta + 3\,cos\theta + 1 = \cos 4\theta - cos3\theta$ බවත්,

(ii). 7θ යන්න 2π හි නිඛිලමය ගුණාකාරයක් නම් $cos4\theta = cos3\theta$ බවත් පෙන්වන්න.

(b). ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නීතිය ප්‍රකාශ කරන්න.

O යනු OAB = OBC = OCA = θ වන පරිදි ABC ත්‍රිකෝණයක් තුළ පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු. OBC හා OAB ත්‍රිකෝණවලට සයින් නීතිය භාවිතා කරමින් සම්මත අංකනයෙන්,

$OB = \frac{a\sin(C-\theta)}{sinC} = \frac{c\ sin\theta}{sinB}$ බව සාධනය කර

$cot\theta = cotA + cotB + cotC$ බව අපෝහනය කරන්න.