ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර(උසස් පෙළ),2002 අප්‍රේල්

සංයුක්ත ගණිතය I | පැය තුනයි

01). $f(x) = x^2 + 2x + 9; \quad x \epsilon R$ යයි ගනිමු.

i. α, β යනු $f(x) = 0$ හි මූල නම් $\alpha^2 - 1$ සහ $\beta^2 - 1$ මූල වශයෙන් ඇති වර්ගජ සමීකරණය ලබා ගන්න.

ii. $f(x) = k$ සමීකරණයට , x සඳහා හරියටම එක් තාත්වික මූලයක් පවතින සේ වූ k තාත්වික නියතයේ අගය සොයන්න.

iii. $\frac{1}{f(x)}$ හි වඩිතම අගය සොයා, එය ලැබෙන්නා වූ x හි අගය ද දෙන්න.

iv. $f(x) = \lambda$x සමීකරණයට x සඳහා තාත්වික විසඳුමක් නොමැති වන සේ වූ λ තාත්වික නියතයේ අගය කුලකය නිර්ණය කරන්න.

02)(a). හරියට ම ශිෂ්‍යයන් හතර දෙනෙකුගෙන් සමන්විත පාසල් විවාද කණ්ඩායමක්, සුදුසුකම් ලැබූ ශිෂ්‍යයන් දිළොස් දෙනෙකු අතුරින් තෝරා ගැනීමට නියමිතය, එම කණ්ඩායම තෝරා ගත හැකි ආකාර ගණන සොයන්න.

අනුර සහ භවන් සුදුසුකම් ලැබූ ශිෂ්‍යයන් දොළොස් දෙනා අතර වේ.

i. අනුර සහ භවන් දෙදෙනාම කණ්ඩායමේ සිටී,

ii. එක්කෝ අනුර නැතහොත් භවන් කණ්ඩායමේ සිටී,

iii. අනුරවත් භවන් වත් කණ්ඩායමේ නොසිටී,

යන එක් එක් අවස්ථාව සඳහා විවාද කණ්ඩායම තෝරාගත හැකි ආකාර ගණන සොයන්න.

(b). $\left(\frac{7}{6x} - \frac{6x}{7}\right)^{13}$ හි ප්‍රසාරණය සලකන්න.

i. x හි ඉරට්ටේ බල හෝ $\frac{1}{x}$ හි ඉරට්ටේ බල හෝ එම ප්‍රසාරණය නොමැති බව,

ii. $\frac{1}{x}$ හි සංගුණකය 2002 බව

පෙන්වන්න.

03)(a). ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය උපයෝගී කර ගනිමින් සෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා $n! \geq 2^{n-1}$ බව සාධනය කරන්න.

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\leq 2-\frac{1}{2^{n-1}}$ බව අපෝහනය කරන්න.
ඒ නයින් $e \leq 3$ බව පෙන්වන්න; මෙහි e යනු ප්‍රකෘති ලඝුගණකවල පාදය වේ.

(b). $y = |3x - a|$ සහ $y = |bx - 2|$ හි ප්‍රස්තාර එකම සටහනක අඳින්න; මෙහි a හා b ධන සංඛ්‍යා වේ.

$|3x - a| < |bx - 2|$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලුම අගය කුලකය $\left\{x : x > \frac{4}{3}\right\}$ නම්, ප්‍රස්තාරය උපයෝගී කර ගැනීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ a හා b සොයන්න.

04). Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව, $Z = x + iy, x > 0, y > 0$ මඟින් දෙනු ලැබේ. ආර්ගන්ඩ් සටහනෙහි Z, $2iZ$, $Z + 2iZ$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් A,B,C වේ. A,B,C ලක්ෂ්‍ය සළකුණු කර, AOB∠ සහ tan AOC∠ නිර්ණය කරන්න.

i. C අතාත්වික අක්ෂයේ පිහිටයි නම්, x හා y අතර සම්බන්ධතාව ලබා ගන්න.
ii. $y = 2x$ නම්, Z^2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය OC රේඛාව මත පිහිටින බව පෙන්වන්න.
iii. $|Z| \leq 4$ සහ $tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \leq argZ \leq tan^{-1}(2)$ වන පරිදි වූ Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයන්ගෙන් පෙදෙස වෙනත් රූප සටහනක අඳුරු කරන්න.
අඳුරු කළ කොටසේ වර්ගඵලය සොයන්න.

05)(a). $y = e^{4x}sin3x$ නම්, $\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 25y = 0$ බව පෙන්වන්න.
$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}$ සහ $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}$ සොයන්න.

(b). ඝන ගෝලයකින්, ගෝලයේ කේන්ද්‍රය හරහා යන්නා වූ අක්ෂයක් සහිත ඍජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයක් කපනු ලැබේ. සිලින්ඩරයේ පරිමාව, ගෝලයේ පරිමාව මෙන් $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ට වඩා වැඩි විය නොහැකි බව සාධනය කරන්න.

06)(a). සුදුසු ආදේශයක් යෙදීමෙන්, $\int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}dx$ අනුකලය අගයන්න.

(b). කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int_0^1 x\, tan^{-1}x\, dx$ අනුකලය අගයන්න.

(c). $\int_1^2 \frac{5x-4}{(1-x+x^2)(2+x)}dx$ සොයන්න.

07). $u_1 = a_1x + b_1y + c_1 = 0$ සහ $u_2 = a_2x + b_2y + c_2 = 0$ යනු දී ඇති සමාන්තර නොවන සරල රේඛා දෙකකි. λ හි සෑම අගයක් සඳහාම $u_1 + \lambda u_2 = 0$ සරල රේඛාව අචල ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන බව පෙන්වන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක සම්මුඛ පාද වලට B,C හරහා අඳිනු ලැබූ ලම්භ වල සමීකරණ පිළිවෙලින් $x - 4y + 5 = 0$ සහ $2x - y + 3 = 0$ වේ. A හි ඛණ්ඩාංක (k ,-k) ලෙස ගනු ලැබුවේ නම් , AB හා AC රේඛාවල සමීකරණද B හි සහ C හි ඛණ්ඩාංකද k ඇසුරෙන් සොයන්න. K විචලනය වන විට ABC ත්‍රිකෝණයේ කේන්ද්‍රකය , $x + 5y - 4 = 0$ රේඛාව මත පිහිටන බව සාධනය කරන්න.

08). $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1 = 0$ සහ $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2 = 0$ වෘත්ත ස්පර්ශ වීම සඳහා අවශ්‍යතාව සොයන්න . ඒවා ස්පර්ශ වේ නම් ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය $2(g_1-g_2)x + 2(f_1-f_2)y + c_1 - c_2 = 0$ සහ $(f_1-f_2)x - (g_1-g_2)y + f_1g_2 - f_2g_1 = 0$ රේඛා එකිනෙකක් මත පිහිටින බව සාධනය කරන්න.

$x^2+y^2-2x+4y = 0$ හා $x^2+y^2-10x+20 = 0$ වෘත්ත එකිනෙකට භාහිරව ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වා වෘත්ත දෙකෙහි A ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.
P යනු, P හි සිට පළමු වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග P සිට දෙවන වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග මෙන් k(නියතයක්) වාරයක් වන සේ ලක්ෂ්‍යයකි . $k^2 \neq 1$ නම් P හි පථය A හරහා වූ වෘත්තයක් බව සාධනය කර k ඇසුරෙන් එහි සමීකරණය සොයන්න.

09). ABC යනු, b > c පරිදි වූ ත්‍රිකෝණයකි. D සහ E යනු, A හරහා මධ්‍යස්ථය AD වන පරිදි ද ,AD ,AE මගින් A කෝණය ත්‍රිච්ඡේද කරන පරිදි ද BC මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය වේ . සුදුසු ලෙස තෝරා ගනු ලැබූ ත්‍රිකෝණ දෙකකට සයින් නියමය යෙදීමෙන්, $cos\frac{A}{3} = \frac{b}{2c}$ බව සාධනය කරන්න.

$DE: EB = 1: k$ නම් $cos\frac{A}{3}$ රාශිය $\frac{(2+k)c}{2kb}$ ට ද සමාන බව පෙන්වන්න.

$k = 1$ නම් $a = 90°$ බව ද $k = 2$ නම් $A = 135°$ බව ද අපෝහනය කරන්න.

එක් එක් අවස්ථාවේ දී a ඇසුරෙන් b හා c නිර්ණය කරන්න.