ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර(උසස් පෙළ),2001 අප්‍රේල්

සංයුක්ත ගණිතය I	පැය තුනයි

01)(a). α සහ β යනු $x^2 + px + 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල සහ γ සහ δ යනු $x^2 + \frac{1}{p}x + 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල යැයි ද ගනිමු.

$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \delta) = (\gamma^2 + p\gamma + 1)(\delta^2 + p\delta + 1)$ බව පෙන්වා.

$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \delta) = \left(p - \frac{1}{p}\right)^2$ බව අපෝහනය කරන්න.

(b). a හා b යනු ධන තාත්වික සංඛ්‍යා නම්, $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ බව පෙන්වන්න.

$\frac{1}{\log_2 2001} + \frac{1}{\log_3 2001} + \frac{1}{\log_4 2001} + \ldots + \frac{1}{\log_{100} 2001} = \frac{1}{\log_{100!} 2001}$ බව පෙන්වන්න.

02)(අ) $n = 1,2,3, \ldots$ සඳහා

$A_{n+1} = (1 - \alpha)(1 - A_n) + A_n$ සහ $A_1 = \beta$ යයි ගනිමු; මෙහි α සහ β තාත්වික සංඛ්‍යා වේ. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය උපයෝගී කර ගනිමින් සෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා $A_n = 1 - (1 - \beta)\alpha^{n-1}$ බව සාධනය කරන්න.

$\sum_{r=1}^{n} A_r$ සොයන්න.

(ආ). $1 \leq k \leq n$ වන සේ වූ k සහ n නිඛිල සඳහා

$k \ \ n_{C_k} = n \quad (n-1)_{C_{(k-1)}}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ ඕනෑම $x \epsilon \mathbb{R}$ සහ $n \geq 0$ සඳහා

$\sum_{k=0}^{n} k \ \ n_{C_k} \ x^k (1 - x)^{n-k} = nx$ බව සාධනය කරන්න.

04)(i). $Arg(Z - a) = \alpha$ නම්, Z හි පථය විස්තර කරන්න. මෙහි $a \in \mathbb{R}$ හා $0 < \alpha < \pi$ වේ.

$Arg(Z + 1) = \frac{\pi}{6}$ හා $Arg(Z - 1) = \frac{2\pi}{3}$ බව දී ඇත. මුල් කොටස උපයෝගී කරගෙන Z සොයන්න.

(ii). $\frac{5-i}{2-3i}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $\lambda(1+i)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි λ තාත්වික වේ. λ හි අගය සොයන්න. ඒ නයින් $\left(\frac{5-i}{2-3i}\right)^6$ අතාත්වික බව පෙන්වා එහි අගය නිර්ණය කරන්න.

05)(a). $x = t - \sin t$ හා $y = 1 - \cos t$ නම් $t \neq 2n\pi , n \in \mathcal{Z}$ සඳහා $y\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ බව සාධනය කරන්න.

(b). A,B සහ C නගර තුන පිහිටා ඇත්තේ A සිට B දක්වා සහ A සිට C දක්වා දුර 12km සහ A ඔස්සේ වූ උච්චය 16km වේ. අවම නල ප්‍රමාණයක් උපයෝගී කර ගනිමින් A,B සහ C නගර තුනටම නල ජලය සැපයීම සඳහා A ඔස්සේ වූ උච්චම වන A සිට කොපමණ දුරකින් ළිඳක් පිහිටිය යුතුද?

06)(a). සුදුසු ආදේශයක් යොදා ගනිමින් $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$ අනුකලනය කරන්න.

(b). කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යොදා ගෙන $\int_2^4 x\ lnx\ dx = a\ lnb + c$ බව පෙන්වන්න. මෙහි a,b සහ c නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

(c). $\int_0^1 \frac{(7x-x^2)}{(2-x)(x^2+1)}dx$ සොයන්න.

07). y = mx + c සරළ රේඛාවට සමාන්තර නොවන $u_1 = y - m_1x - c_1 = 0$ සහ $u_2 = y - m_2x - c_2 = 0$ සරල රේඛා දෙක පිළිවෙලින් A හා B දි ඡේදනය කරයි. R යනු AR = kRB වන සේ AB මත වූ ලක්ෂ්‍යයකි. $u_1 = 0$ සහ $u_2 = 0$ හි ඡේධන ලක්ෂ්‍යයට R යාකරන සරල රේඛාවේ සමීකරණය $u_1 + \frac{k(m-m_1)}{(m-m_2)}u_2 = 0$ බව පෙන්වන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක AB,BC,CAපැති පිළිවෙලින් 3x + 2y - 6 = 0 , 2x + y - 2 = 0 , x + y – 3 = 0 රේඛා ඔස්සේ පිහිටයි. AB මත R ලක්ෂ්‍යයක් සහ AC මත Q ලක්ෂයයක් 2AR = RB සහ 3AQ = 2QC වන පරිදි පිහිටා ඇත.

I. A හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.
II. BQ හා CR රේඛාවල සමිකරණ ලියන්න.
III. D හිදි BQ සහ CR හමුවේ නම් සහ P යනු AD හා BC හි ඡේධන ලක්ෂ්‍යය නම් AP:PB අනුපාතය සොයන්න .

08). (x_0,y_0) භාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ වෘත්තයට අඳින ලද ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය $xx_0+yy_0+g(x+x_0)+f(y+y_0)+c=0$ බව පෙන්වන්න.

දෙන ලද වෘත්තයක සහ දෙන ලද සරල රේඛාවක සමීකරණ පිළිවෙලින් $x^2+y^2+2x+6y+1=0$ සහා $4x+3y-5=0$වේ. රේඛාව වෘත්තය නොකපන බව පෙන්වන්න .

විචල්‍ය සරල රේඛාවක් , දී ඇති වෘත්තය , P හා Q ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍යය දෙකකදී ඡේධනය කරන අතර ,P හා Q හිදී වෘත්තයට වූ ස්පර්ශක දී ඇති සරල රේඛාව මතදී හමුවේ .මෙමෙ විචලය රේඛාව අචල ලක්ෂ්‍යයක් හරහා ගමන් කරන බව පෙන්වා මෙම ලක්ෂ්‍යයේ කණ්ඩාංක සොයන්න.

09). ඕනෑම x තාත්වික සංඛ්‍යාවක් සඳහා
$sin^3 2x\, cos6x + cos^3 2x\, sin6x = \frac{3}{4}\, sin8x$ බව පෙන්වන්න.

$sin^3 2x\, cos6x + cos^3 2x\, sin6x = a$ සමීකරණය විසඳිය හැකි a හි අගයන් අපෝහනය කරන්න.

(b). ත්‍රිකෝණයක විශාලතම කෝණය කුඩාතම කෝණයේ තරම මෙන් දෙගුණයක් ද, දිගම පාදය කෙටිතම පාදය මෙන් 1.5 ගුණයක්ද වේ. ත්‍රිකෝණයේ කුඩාතම කෝණය $cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ බව පන්වන්න.
මධ්‍ය පාදයේ දිග 10cm බව දී ඇත්නම්, අනෙක් පාද දෙකේ දිගවල් සොයන්න.