ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර(උසස් පෙළ),2000 අප්‍රේල්
සංයුක්ත ගණිතය I	පැය තුනයි

01)(අ). α හා β යනු $x^2 - px + q = 0$ සමීකරණයේ මූල වේ. $\alpha(\alpha+\beta)$ හා $\beta(\alpha+\beta)$ මූල වන සමීකරණය සොයන්න.

(ආ). $f(x,y) = 2x^2 + \lambda xy + 3y^2 - 5y - 2$ ප්‍රකාශනය රේඛීය සාධක දෙකක ගුණිතයක් ලෙස ලිවිය හැකි වීමට λ හි අගය සොයන්න.

(ඇ). $\frac{2x^3-x+3}{x(x-1)^2}$ භින්න භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

02)(a). n ඕනෑම ධන නිඛිලයක් සඳහා
$U_n = 1 \cdot n + 2(n-1) + \cdots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1$ යයි ගනිමු.
ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මඟින් $U_n = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$ බව සාධනය කරන්න.
n ඕනෑම ධන නිඛිලයක් සඳහා $\frac{1}{U_n} = V_n - V_{n+1}$ වන අයුරින් V_n සොයන්න.
ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{U_r} = \frac{3}{2} - \frac{3}{(n+1)(n+2)}$ බව පෙන්වන්න.
$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{U_n}$ හි අගය අපෝහනය කරන්න.

(b). $(1+kx)^{10} = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_{10}x^{10}$ $x\epsilon\mathbb{R}$ යයි ගනිමු ; මෙහි $a_2 = \frac{20}{9}$ හා k යනු ධන නියතයකි.
k හි අගය සොයන්න.
$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = \frac{11^{10}-7^{10}}{2.9^{10}}$ බව පෙන්වන්න.
$a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$ හි අගය අපෝහනය කරන්න.

03)(a). $\frac{(-1+i)^3}{(1+i)^4}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ මාපාංකය සහ විස්තාරය විජීය ලෙස සොයන්න.

(b). P_1 හා P_2 ලක්ෂ්‍යයන් ආගන්ඩ් සටහනේ පිළිවෙලින් $\mathcal{Z}_1$ හා $\mathcal{Z}_2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි ආගන්ඩ් සටහනේ $\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටීම ලබාගැනීමට ජ්‍යාමිතික නිර්මාණය සපයන්න. $\mathcal{Z}_1 = \frac{1+i}{1-i}$ හා $\mathcal{Z}_2 = \frac{\sqrt{2}}{1-i}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ් සටහනේ ලකුණු කරන්න. ඉහත ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2$ හි පිහිටීම සොයන්න.

$tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ බව අපෝහනය කර්න්න.

04)(a). $\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2(2\,sinx)}{1-cos2x}$ අගයන්න.

(b). $y = e^{k\,sin^{-1}x}$ නම් $\frac{dy}{dx}\sqrt{1-x^2} = ky$ බව පෙන්වන්න

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\frac{1}{2}}$ සොයන්න.

(b). A,B හා C නගර තුනක් $ABC = \frac{\pi}{2}, AB = 15km\,, BC = 50km$ වන අයුරින් AB හා BC සෘජු මාර්ග දෙකකින් සම්බන්ධ කර ඇත. A නගරය ,BC මාර්ගයේ D නම් ස්ථානයට සම්බන්ධ කරමින් තවත් සෘජු මාර්ගයක් කැපීමට නියමිතය. මෝටර් රථයක් සඳහා DC කොටස මත 50kmh^{-1} ක හා AD යෝජිත මාර්ගය මත 40 kmh^{-1} උපරිම වේගයක් ඇත.

A නගරයේ සිට x km දුරින් D පිහිටා ඇත්නම් අවසර ඇති උපරිම වේගයෙන් මෝටර් රථය ගමන් කරනු ලබන්නේ යැ උපකල්පනය කරමින් ,D හරහා A සිට C තෙක් මෝටර් රථය ගමන් කිරීමට ගන්නා ලද සම්පූර්ණ කාලය T(x) පැය වලින් සොයන්න.

O සිට 50 km තෙක් x වැඩි වන විට $\frac{dT}{dx}$ හි ලකුණ පරීක්ෂා කරන්න.
A සිට C තෙක් කෙටිම කාලයකින් ගමන් කිරීමට රථයට හැකිවන අයුරින් D සඳහා වඩා සුදුසුම ස්ථානය සොයන්න.

05)(a). සුදුසු ආදේශයක් උපයෝගී කර ගනිමින් $\int_1^8 \frac{1}{\left(x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{3}{2}}\right)}dx$ අගයන්න.

(b). $I = \int_0^\pi e^{-2x}\, cosx\, dx$ හා $j = \int_0^\pi e^{-2x}\, sinx\, dx$ යයි ගනිමු.
කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යොදා ගෙන $I = 2J$ හා $J = 1 + e^{-2x} - 2I$ බව පෙන්වන්න.

(c). $\int \frac{x^2-5x}{(x-1)(x+1)} dx$ සොයන්න.

06). x හා y අක්ෂ මත පිළිවෙලින් a හා b අන්තඃඛණ්ඩ සාදනු ලබන සරළ රේඛාවේ සමීකරණය ලබාගන්න.

$\frac{x}{h}+\frac{y}{k}=1$ මඟින් දෙනුලබන L අචල සරල රේඛාවක් x හා y අක්ෂ පිළිවෙලින් A හා B ලක්ෂ්‍ය වලදි හමුවේ. L රේඛාවට ලම්භ L_1 නම් සරල රේඛාවක් x හා y අක්ෂ පිළිවෙලින් P හා Q ලක්ෂ්‍යවලදී හමුවේ. AQ හා BP සරළ රේඛාවළ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය , (h,k) ලක්ෂ්‍යයරහිත $x^2+y^2-hx-ky=0$ වෘත්තය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

07). $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$ හා $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$ මගින්දෙනු ලබන වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්භව ඡේධනයවේ නම් එවිට $2g_1g_2+2f_1f_2=c_1+c_2$ බව පෙන්වන්න.

x අක්ෂය මත කේන්ද්‍රය පිහිටි S වෘත්තයක් $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ මගින් දෙනු ලබන S' වෘත්තය ප්‍රලම්භව ඡේධනය කරන අතර $x^2+y^2+4x+6y+9=0$ මගින් දෙනු ලබන S''වෘත්තය ස්පර්ශ කරණු ලැබේ. එකක් S''වෘත්තය භාහිරව ස්පර්ශ කරන ලෙසද අනෙක S'' වෘත්තය අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ කරන ලෙසද වූ එවැනි වෘත්ත දෙකක් S ට ඇති බව පෙන්වන්න. මෙමෙ වෘත්ත දෙකේ සමීකරණ සොයන්න.

08)(a). $n\epsilon\mathbb{Z}, \theta \neq n\pi$ හෝ $2n\pi \neq \frac{\pi}{2}$ සඳහා $\frac{1+cos\theta+sin\theta}{1-cos\theta+sin\theta}=\frac{1+cos\theta}{sin\theta}$ බව පෙන්වන්න.

(b). සියලු තාත්වික x සඳහා $8(cos^6x+sin^6x)=5+3\,cos4x$ බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ සඳහා $y=cos^6x+sin^6x$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අදින්න.

එම පරාසය තුළ $y=k$ සමීකරණයට

i. විසඳුම් නොමැති වීම
ii. විසඳුම් දෙකක් පමණක් තිබීම
iii. විසඳුම් තුනක් පමණක් තිබීම
iv. විසඳුම් හතරක් පමණක් තිබීම

සඳහා k හි අගය හෝ පරාසය අපෝහනය කරන්න.

09)(a). $0 \leq x \leq 2\pi$ සඳහා $4\,sin^2x + 12\,sinx\,cosx - cos^2x + 5 = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

(b). ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් හා කෝසයින් නියම ප්‍රකාශ කරන්න.

$\frac{b+c}{2k-1} = \frac{c+a}{2k} = \frac{a+b}{2k+1}$ බව දී ඇත ; මෙහි k යනු 2 ට වඩා වඩි එහෙත් 4 ට සමාන නොවන දෙන ලද නිඛිලයක්ද a,b,c සුපුරුදු අංකනය ද වේ.
$\frac{sinA}{k+1} = \frac{sinB}{k} = \frac{sinC}{k-1}$ බව පෙන්වන්න.

K ඇසුරෙන් $cosA$ ලබා ගෙන $\frac{cosA}{(k-4)(k+1)} = \frac{cosB}{k^2+2} = \frac{cosC}{(k+4)(k-1)}$ බව පෙන්වන්න.